1re Technologique Mathématiques

(STI2D)

Nombres Complexes
Forme Algébrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉEL OU IMAGINAIRE PUR ? 9

CORRECTION

1. Déterminons la forme algébrique de Z:

Ici: $Z = (z + 1 + i)^2$, avec $z = x + iy$.

Dans ces conditions: $Z = (z + 1 + i) \times (z + 1 + i)$

$= z^2 + z + iz + z + 1 + i + iz + i - 1$

$= z^2 + 2z + 2iz + 2i$

$= (x + iy)^2 + 2 \times (x + iy) + 2i \times (x + iy) + 2i$

$= (x^2 - y^2 + 2x - 2y) + i\,(2xy + 2x + 2y + 2)$.

Ainsi, sous forme algébrique Z s'écrit:

$$Z = (x^2 - y^2 + 2x - 2y) + i\,(2xy + 2x + 2y + 2).$$

2. Déduisons-en les nombres complexes z tels que Z soit un imaginaire pur:

Z est un imaginaire pur ssi: $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$.

Or: $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0 \iff (x - y)\,(x + y + 2) = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ \text{ou} \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x + y = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y - 2 \end{cases}$$

Ainsi, les nombres complexes z tels que Z soit un imaginaire pur sont de la forme: • $z = y + iy$ (quand $x = y$)

ou

• $z = (-y - 2) + iy$ (quand $x = -y - 2$).

3. Pour $z = -2i$, Z est-il un réel ?

Si $z = -2i$: $Z = (-2i + 1 + i)^2$

$= (1 - i)^2$

$= -2i \notin \mathbb{R}$.

Donc si $z = -2i$: Z n'est pas un nombre réel !