

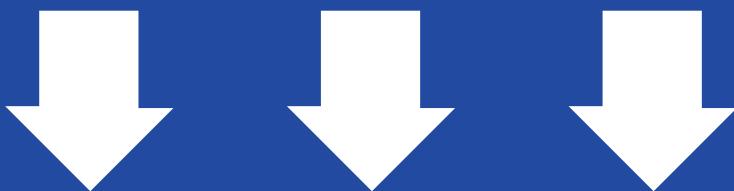
1^{re}

Technologique

Mathématiques

(STI2D)

Nombres Complexes
Équations du Premier Degré



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATIONS DU 1^{er} DEGRÉ

3

CORRECTION

1. Résolvons dans \mathbb{C} l'équation $\frac{z-2}{z+i} = \frac{z-2i}{z+1}$:

Soit l'équation: $\frac{z-2}{z+i} = \frac{z-2i}{z+1}$.

Étape 1: détermination de l'ensemble de définition.

Il faut que: $\begin{cases} z+i \neq 0 \\ z+1 \neq 0 \end{cases}$ cad $\begin{cases} z \neq -i \\ z \neq -1 \end{cases}$

D'où l'ensemble de définition est: $\mathbb{C} - \{-i; -1\}$.

Étape 2: résolution de l'équation sur $\mathbb{C} - \{-i; -1\}$.

$$\frac{z-2}{z+i} = \frac{z-2i}{z+1} \iff (z-2)(z+1) = (z-2i)(z+i)$$

$$\iff z^2 + z - 2z - 2 = z^2 + iz - 2iz + 2$$

$$\iff -z - 2 = -iz + 2$$

$$\iff -(x+iy) - 2 = -i(x+iy) + 2$$

$$\iff -x - iy - 2 = -ix + y + 2$$

$$\Leftrightarrow (-x - y - 4) + i \times (-y + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ -y + x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -4 & \text{cad} \\ x = y & \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

En conclusion la solution est: $z = -2 + i \times (-2)$.

2. Résolvons dans \mathbb{C} l'équation $\frac{-z}{iz + 1} + \frac{3z}{z - i} = 3 + i$:

Soit l'équation: $\frac{-z}{iz + 1} + \frac{3z}{z - i} = 3 + i$.

Étape 1: détermination de l'ensemble de définition.

Il faut que: $\begin{cases} iz + 1 \neq 0 \\ z - i \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -\frac{1}{i} \\ z \neq i \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq \frac{-1 \times i}{i^2} & \text{cad } z \neq i \\ z \neq i & \end{cases}$$

D'où l'ensemble de définition est: $\mathbb{C} - \{i\}$.

Étape 2: résolution de l'équation sur $\mathbb{C} - \{i\}$.

$$\frac{-z}{iz + 1} + \frac{3z}{z - i} = 3 + i \Leftrightarrow -z(z - i) + 3z(iz + 1) = (3 + i)(iz + 1)(z - i)$$

$$\Leftrightarrow -z^2 + iz + 3iz^2 + 3z = (3+i)(iz^2 + z + z - i)$$

$$\Leftrightarrow 3z - 3i + iz + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+iy) - 3i + i(x+iy) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3iy - 3i + ix - y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - y + 1) + i(3y + x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 3y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-3y + 3) - y + 1 = 0 \\ x = -3y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9y + 9 - y + 1 = 0 \\ x = -3y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10y + 10 = 0 \\ x = -3y + 3 \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Or: " $x = 0$ " et " $y = 1$ " signifie que $z = 0 + i \times 1 = i \notin \mathbb{C} - \{i\}$.

En conclusion, l'équation $\frac{-z}{iz + 1} + \frac{3z}{z - i} = 3 + i$ n'admet aucune solution.