1re Technologique Mathématiques

Dérivées de Fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE PROFIT MAXIMUM !

CORRECTION

1. Déterminons le prix d'une tonne de ce produit:

D'après l'énoncé, la recette totale est: $R(q) = 84q$.

Or d'une manière générale, la recette totale d'une entreprise s'écrit:

$$R(q) = P \times q.$$

Par identification, nous obtenons: $P = 84$ euros.

Au total, le prix d'une tonne de ce produit est égal à: $P = 84$ euros.

2. Écrivons le profit de l'entreprise:

Le profit ou bénéfice B de l'entreprise s'écrit:

$$B(q) = \text{Recette totale} - \text{Coût total de production}$$

$$= R(q) - C(q)$$

$$= 84q - (q^3 - 30q^2 + 300q).$$

Ainsi, le profit ou bénéfice de l'entreprise est: $B(q) = -q^3 + 30q^2 - 216q$.

3. Étudions les variations de la fonction B sachant que $q \in [0 ; 20]$:

Ici : • $\mathcal{D}_B = [\,0\,;\,20\,]$,

• $\mathcal{D}_{B'} = [\,0\,;\,20\,]$ car B est dérivable sur $[\,0\,;\,20\,]$,

• pour tout $q \in [\,0\,;\,20\,]$, nous avons donc : $B'(q) = -3q^2 + 60q - 216$.

Nous savons que les racines de B' sont : $q_1 = 10 + \sqrt{28}$ et $q_2 = 10 - \sqrt{28}$.

Distinguons 2 cas :

• $B'(q) \leqslant 0$ ssi $-3q^2 + 60q - 216 \leqslant 0$ cad ssi $q \in [\,0\,;\,q_2\,] \cup [\,q_1\,;\,20\,]$

• $B'(q) \geqslant 0$ ssi $-3q^2 + 60q - 216 \geqslant 0$ cad ssi $q \in [\,q_2\,;\,q_1\,]$.

Nous pouvons ainsi dresser le tableau de variations de B :

q	0		$q_2 = 10 - \sqrt{28}$		$q_1 = 10 + \sqrt{28}$		20
$B'(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(q)$		↘		↗	a	↘	

, avec : • $a = B(10 + \sqrt{28})$.

Ainsi : • **B est décroissante sur $[\,0\,;\,q_2\,] \cup [\,q_1\,;\,20\,]$**

• **B est croissante sur $[\,q_2\,;\,q_1\,]$.**

4. Pour quelle valeur de q le bénéfice est-il maximal ?

Ici, nous obtenons deux extremums :

• un extremum au point C d'abscisse $q = q_2$.

• un extremum au point A d'abscisse $q = q_1$.

Seul le point A d'abscisse $q = q_1$ est un maximum car la fonction B est croissante sur $[\, q_2 \,;\, q_1 \,]$ et décroissante sur $[\, q_1 \,;\, 20 \,]$.

Donc le point A d'abscisse $q = 10 + \sqrt{28}$ est: un maximum.

Pour réaliser un profit maximum, l'entreprise doit donc vendre une quantité de produit égale à: $q = 10 + \sqrt{28}$ tonnes.

5. Déterminons alors ce bénéfice maximal:

Ce bénéfice ou profit maximal sera alors de: $q = B\,(\,10 + \sqrt{28}\,)$ euros.