Corrigé

Exercice 1

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

PROBABILITÉS, BAC S

(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

EXERCICE 1

[Inde, Pondichéry 2019]

QUESTION 1: d. est la bonne réponse.

En effet, il s'agit de calculer: $P(X = 20)$, sachant que la variable aléatoire X suit une loi binômiale de paramètres: $n = 80$ et $p = \frac{1}{4}$.

Dans ces conditions: $P(X = 20) = \binom{80}{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{60}$

cad: $P(X = 20) \approx 0,103$, à l'aide d'une machine à calculer.

Au total, la probabilité qu'il y ait exactement 20 clients pratiquant le surf est d'environ: 10,3%.

QUESTION 2: d. est la bonne réponse.

En effet, d'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ cm et d'écart type $\sigma = x$.
- T suit la loi normale centrée réduite.
- $P(X \geq 200) = 2,5\%$.

Etape 1: Détermination de la valeur de l'écart type σ à savoir x.

$P(X \geq 200) = 2,5\% \iff P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{200 - 150}{x}\right) = 2,5\%$

$$\iff P\left(T \geqslant \frac{50}{x}\right) = 2,5\%$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{50}{x}\right) = 97,5\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$\frac{50}{x} \approx 1,96$ cad: $x \approx 25,51$ cm.

Ainsi, l'écart type de la loi normale X est: $\sigma \approx 25,51$ cm.

Etape 2: On calcule P (X ⩾ 100).

$$P(X \geqslant 100) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{100-150}{25,51}\right)$$

$$= P(T \geqslant -1,96)$$

$$= P(T \leqslant 1,96).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(X \geqslant 100) = 97,5\%$.

Au total, nous pouvons affirmer que: $P(X \geqslant 100) = 97,5\%$.

QUESTION 3: c. est la bonne réponse.

En effet, d'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi exponentielle de paramètre: λ.

Dans ces conditions:

- $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5$ ans.

• $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(t)\,dt$.

Ainsi, comme $\frac{1}{\lambda} = 5$: $\lambda = \frac{1}{5}$.

D'où: $P(T \geqslant 5) = 1 - P(T \leqslant 5)$

$$= 1 - \int_0^5 \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}}\,dt$$

$$= 1 - \frac{1}{5}\left[-5\,e^{-\frac{t}{5}}\right]_0^5$$

$$= 1 - \frac{1}{5}(-5\,e^{-1} + 5)$$

$$= e^{-1}.$$

Au total, nous savons: $P(T \geqslant 5) = e^{-1}$.

QUESTION 4: b. est la bonne réponse.

D'après le cours, nous savons qu'un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, nous est donné par la formule suivante:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right],$$

avec: • $n \geqslant 30$,

• f = la fréquence observée,

• $n \cdot f \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - f) \geqslant 5$.

Dans ces conditions, la longueur L de l'intervalle est: $L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Or, d'après l'énoncé, celle-ci est égale à: $0,04$.

D'où nous avons: $\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,04$ et donc $n = 2\,500$ **clients satisfaits**.

Au total: il y a 2 500 clients satisfaits des prestations effectuées dans la station de ski.