SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LIMOGES

Classes de première S • 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de Premières

Mercredi 21 mars 2012

(de 8 h à 12 h)

Les quatre exercices sont à traiter et sont indépendants.

(ATTENTION : l' « exercice 4 » dépend de la série, le premier est pour les candidats de la série S et le second est pour les candidats des séries autres que S.)

Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 (National)

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

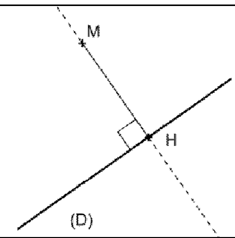
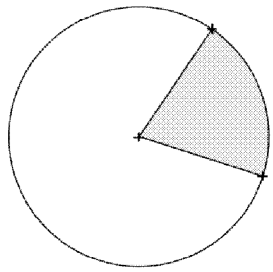
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   - *a.* Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   - *b.* Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   - *c.* Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   - *d.* Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4. Soit n un entier *digisible* quelconque.
   - *a.* Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   - *b.* Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   - *c.* Déterminer le plus grand entier *digisible*.

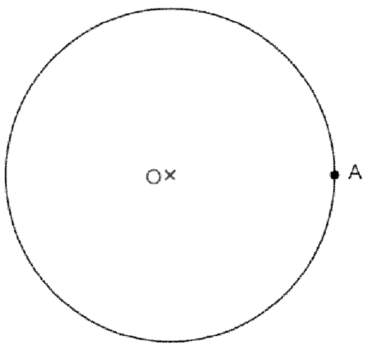
EXERCICE 2 (National)

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure* α *(en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à* ***un segment [****BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.

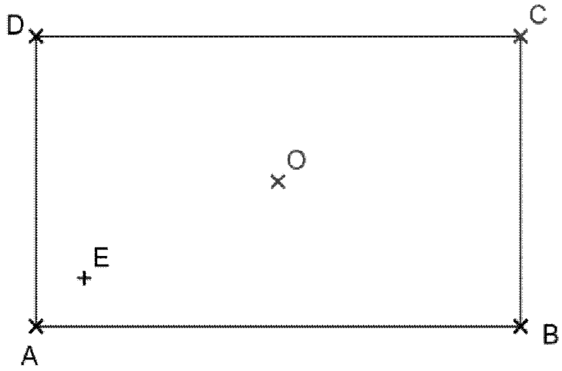


1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

   Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2. *a.* Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

   c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.
On utilisera dans le problème la formule suivante qui donne la somme des entiers de 1 à n :

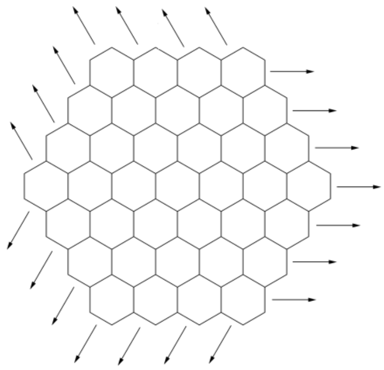
Formule : $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple : $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 = \frac{10\times11}{2} = 55$.

Un *hexagone d'ordre* n est une figure hexagonale régulière formée de petits hexagones réguliers avec n hexagones sur chaque côté (ci-contre l'hexagone d'ordre 4).

Les petits hexagones seront appelés *cellules*.

On note $C(n)$ le nombre de cellules d'un hexagone d'ordre *n*.



Un *hexagone magique d'ordre* n est un hexagone d'ordre n dont les $C(n)$ cellules sont remplies par tous les entiers de 1 à $C(n)$, de telle sorte que la somme des entiers de chaque ligne (dans les trois directions comme dans la figure précédente) soit toujours la même.

La somme obtenue est alors appelée *somme magique* et notée $S(n)$.

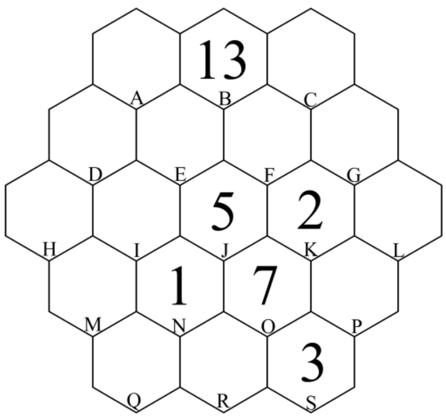
1. Hexagone magique d'ordre 3 :

a. Préciser le nombre de cellules $C(3)$ d'un hexagone d'ordre 3.

b. En utilisant la formule, la somme des entiers de 1 à $C(3)$.

c. En déduire la somme magique $S(3)$.

d. On étudie le cas d'un hexagone magique d'ordre 3 déjà partiellement rempli.



Les lettres servent uniquement à repérer les cellules.

Compléter cet hexagone magique.

Justifier la position du premier nombre placé avec certitude.

2. Étude du cas général :

a. Justifier que $C(n) = 3n^2 - 3n + 1$.

b. Quel est, en fonction de n, le nombre de lignes horizontales d'un hexagone d'ordre n ?

c. Quelle est la somme des entiers de 1 à $C(4)$?
Peut-il exister un hexagone magique d'ordre 4 ?

d. Déterminer une expression de $S(n)$ en fonction de n, puis montrer que

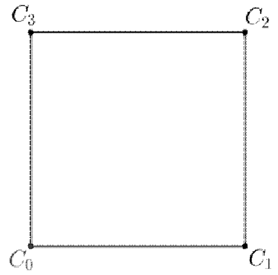
$$32S(n) = 72n^3 - 108n^2 + 90n - 27 + \frac{5}{2n-1}$$

e. En déduire les valeurs de n pour lesquelles un hexagone magique d'ordre n peut exister.

EXERCICE 4 (Cet exercice sera traité uniquement par les candidats de la série S)

Soit $C_O C_1 C_2 C_3$ un carré.

On travaillera dans le repère $(C_O; C_{1,} C_3)$.



1. Indiquer les coordonnées de C_0, C_1, C_2 et C_3.

2. On définit la suite de points (P_n) par : $P_0 = C_0$ et pour tout entier n, P_{n+1} est le milieu de $[P_n C_k]$ où k est le reste de la division euclidienne de $n + 1$ par 4.

   - P_1 est le milieu de $[P_0 C_1]$
   - P_2 est le milieu de $[P_1 C_2]$
   - P_3 est le milieu de $[P_2 C_3]$
   - P_4 est le milieu de $[P_3 C_0]$
   - P_5 est le milieu de $[P_4 C_1]$

   etc.

   a. Déterminer les coordonnées de P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 et P_7 sous forme exacte.

   b. Démontrer que P_0, P_3, P_4 et P_7 sont alignés sur la droite Δ_0 d'équation $y = 2x$.

   c. Démontrer que P_1, P_2, P_5 et P_6 sont alignés sur une droite Δ_1, parallèle à Δ_0 et dont on donnera une équation réduite.

3. a. Soit A un point quelconque de Δ_0. Démontrer que
      - le milieu du segment $[AC_0]$ est sur Δ_0,
      - le milieu du segment $[AC_1]$ est sur Δ_1.

   b. Soit B un point quelconque de Δ_1. Démontrer que
      - le milieu du segment $[BC_2]$ est sur Δ_1,
      - le milieu du segment $[BC_3]$ est sur Δ_0.

   c. Que peut-on en déduire pour la suite de points (P_n) ?

4. Soit $P(x; y)$ un point quelconque du plan. On définit les points Q, R, S et T par
   - Q est le milieu de $[PC_1]$,
   - R est le milieu de $[QC_2]$,
   - S est le milieu de $[RC_3]$,
   - T est le milieu de $[SC_0]$.

   a. Donner les coordonnées de T en fonction de x et y.

   b. Montrer qu'il existe un unique point P tel que $T = P$.
   Donner les coordonnées de ce point P, ainsi que les coordonnées des points Q, R et S correspondants.

   c. Donner des valeurs approchées des coordonnées de P_8 et P_{12}.

   d. Que peut-on conjecturer pour la suite de points (P_n), lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 5 (Cet exercice sera traité par les candidats de toutes les séries autres que S)

Une calculatrice défectueuse permet seulement :

- de taper des nombres positifs ou nuls ;
- de faire l'opération suivante : à partir de trois nombres entrés successivement, (x, y, z), elle affiche 0 si $x = y$ et le résultat de $\frac{z}{x-y}$ sinon.

$$(x, y, z) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{z}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

- l'utilisation des parenthèses ce qui permet de composer des calculs.

L'objectif est de déterminer si cette calculatrice permet tout de même de faire les opérations usuelles sur tout les nombres réels : $+, -, \times, /$.

1. En détaillant les calculs, vérifier les résultats suivants donnés par la calculatrice :

$$(0,1,2) \longmapsto -2 \quad \text{et} \quad \big((2,0,1), 1,1\big) \longmapsto -2$$

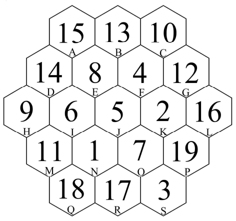
2. Que donne $(2,0,1)$, $(0,2,1)$ et $\big(2,1,(2,1,3)\big)$?
3. Donner un calcul permettant d'obtenir -1.
4. Vérifier que le calcul $(a, 0,1)$ permet d'obtenir l'inverse de a, pour tout $a > 0$.
5. Proposer un calcul permettant de faire la division de deux nombres positifs : $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$.
6. Proposer un calcul permettant de faire la multiplication de deux nombres positifs : $a \times b$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
7. Proposer un calcul permettant de faire la soustraction de deux nombres positifs : $a - b$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
8. Proposer un calcul permettant d'obtenir l'opposé d'un nombre positif : $-a$ avec $a \geq 0$.
9. Proposer un calcul permettant de faire l'addition de deux nombres positifs : $a + b$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
10. Proposer une décomposition du calcul suivant afin de pouvoir le réaliser avec cette calculatrice à partir des nombres donnés :

$$1 + \frac{-3}{34 \times 112 + 4}$$

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 3

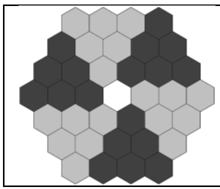
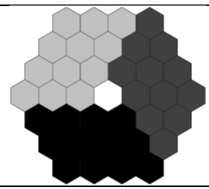
1. **Hexagone magique d'ordre 3 :**
   a. On compte : $C(3) = 19$.
   b. La somme des entiers de 1 à $C(3)$ est $\frac{C(3)(C(3)+1)}{2} = \frac{19\times 20}{2} = 190$.
   c. Il y a 5 lignes dans chaque direction. La somme magique est donc $S(3) = \frac{190}{5} = 38$.
   d. On a $Q + R + S = L + P + S = 38$ donc $Q + R = L + P = 35$.



Les seules valeurs possibles sont $16 + 19 = 17 + 18 = 35$.
On s'intéresse à la cellule P.
- Elle ne contient pas 16 sinon $F = 7 = O$.
- Elle ne contient pas 17 sinon $M = 13 = B$.
- Elle ne contient pas 18 sinon $F = 5 = J$.

La cellule P contient donc 19.

2. **Étude du cas général :**
   a. Plusieurs découpages sont possibles, par exemple :

	$C(n) = 6 \times \frac{n(n-1)}{2} + 1$ $= 3n^2 - 3n + 1$		$C(n) = 3 \times n(n-1) + 1$ $= 3n^2 - 3n + 1$

   b. Il y a $2n - 1$ lignes horizontales pour un hexagone d'ordre n.
   c. On a $C(4) = 3 \times 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 37$. La somme des entiers de 1 à $C(4)$ est $\frac{37\times 38}{2} = 703$.
   Il y a 7 lignes dans chaque direction. La somme magique serait donc $\frac{703}{7}$, qui n'est pas entier.
   Il ne peut donc pas exister un hexagone magique d'ordre 4.
   d. La somme $T(n)$ de tous les entiers jusqu'à $C(n)$ est

$$T(n) = \frac{C(n)(C(n)+1)}{2} = \frac{(3n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 3n + 2)}{2}$$

   La somme magique est donc

$$S(n) = \frac{T(n)}{2n-1} = \frac{(3n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 3n + 2)}{4n - 2}$$

   D'une part, en développant :

$$32S(n) = \frac{144n^4 - 288n^3 + 288n^2 - 144n + 32}{2n - 1}$$

   D'autre part, en réduisant au même dénominateur :

$$72n^3 - 108n^2 + 90n - 27 + \frac{5}{2n-1} = \frac{144n^4 - 288n^3 + 288n^2 - 144n + 32}{2n - 1}$$

   e. La somme magique est un entier, donc également $32S(n)$ et donc aussi $\frac{5}{2n-1}$.
   Le seules valeurs qui conviennent sont $n = 1$ et $n = 3$.
   Dans les deux cas, $S(n)$ est entier et un hexagone magique existe effectivement.

EXERCICE 4 (Série S uniquement)

1. Coordonnées : $C_0(0;0)$, $C_1(1;0)$, $C_2(1;1)$ et $C_3(0;1)$.

2. Huit premiers points :

   a. Avec la formule des coordonnées du milieu : $P_0(0;0)$, $P_1\left(\frac{1}{2};0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$, $P_3\left(\frac{3}{8};\frac{3}{4}\right)$, $P_4\left(\frac{3}{16};\frac{3}{8}\right)$, $P_5\left(\frac{19}{32};\frac{3}{16}\right)$, $P_6\left(\frac{51}{64};\frac{19}{32}\right)$ et $P_7\left(\frac{51}{128};\frac{51}{64}\right)$.

   b. Les points P_0, P_3, P_4 et P_7 sont sur la droite $\Delta_0 : y = 2x$ car leurs coordonnées vérifient l'équation.

   c. Les points P_1, P_2, P_5 et P_6 sont sur la droite $\Delta_1 : y = 2x - 1$ pour la même raison.

3. a. Les coordonnées d'un point A quelconque de Δ_0 sont de la forme $A(x;2x)$.
      - Les coordonnées du milieu de $[AC_0]$ sont $\left(\frac{x}{2};x\right)$, donc il est sur Δ_0,
      - Les coordonnées du milieu de $[AC_1]$ sont $\left(\frac{x+1}{2};x\right)$, donc il est sur Δ_1.

   b. Les coordonnées d'un point B quelconque de Δ_1 sont de la forme $A(x;2x-1)$.
      - Les coordonnées du milieu de $[BC_2]$ sont $\left(\frac{x+1}{2};x\right)$, donc il est sur Δ_1,
      - Les coordonnées du milieu de $[BC_3]$ sont $\left(\frac{x}{2};x\right)$, donc il est sur Δ_0.

   c. Les points P_n sont sur la droite Δ_0 ou la droite Δ_1. Pour tout entier naturel k, P_{4k} est sur Δ_0, P_{4k+1} est sur Δ_1, P_{4k+2} est sur Δ_1 et P_{4k+3} est sur Δ_0.

4. Soit $P(x;y)$ un point quelconque du plan. On définit les points Q, R, S et T par
   - Q est le milieu de $[PC_1]$,
   - R est le milieu de $[QC_2]$,
   - S est le milieu de $[RC_3]$,
   - T est le milieu de $[SC_0]$.

   a. On a successivement : $Q\left(\frac{x+1}{2};\frac{y}{2}\right)$, $R\left(\frac{x+3}{4};\frac{y+2}{4}\right)$, $S\left(\frac{x+3}{8};\frac{y+6}{8}\right)$ et $T\left(\frac{x+3}{16};\frac{y+6}{16}\right)$.

   b. On a $T = P$ si $x = \frac{x+3}{16}$ et $y = \frac{y+6}{16}$, c'est-à-dire $P\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.
   On a alors $Q\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$, $R\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$, et $S\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$.

   c. On a $P_8\left(\frac{51}{256};\frac{51}{128}\right)$ puis à l'aide de la question 4.a : $P_{12}\left(\frac{819}{4096};\frac{819}{2048}\right)$.
   Valeurs approchées : $P_8(0{,}1992;0{,}3984)$ à 10^{-4} et $P_{12}(0{,}19995;0{,}39990)$ à 10^{-5}.

   d. Avec les notations de la question 4.b : lorsque k tend vers $+\infty$,
   P_{4k} tend vers P, P_{4k+1} tend vers Q, P_{4k+2} tend vers R et P_{4k+3} tend vers S.

EXERCICE 5 (Toutes séries sauf S)

1. On a $(0{,}1{,}2) \longmapsto \frac{2}{0-1} = -2$ et $\big((2{,}0{,}1), 1{,}1\big) \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{2-0}-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

2. On a $(2{,}0{,}1) \longmapsto \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$, $(0{,}2{,}1) \longmapsto \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$ et $\big(2{,}1, (2{,}1{,}3)\big) \longmapsto \frac{\frac{3}{2-1}}{2-1} = 3$.

3. Par exemple : $(0{,}1{,}1) \longmapsto \frac{1}{0-1} = -1$.

4. On a $(a, 0{,}1) \longmapsto \frac{1}{a-0} = \frac{1}{a}$ pour tout $a > 0$.

5. Par exemple : $(b, 0, a) \longmapsto \frac{a}{b-0} = \frac{a}{b}$ pour tous $a \geq 0$ et $b > 0$.

6. Si $a \geq 0$ et $b > 0$, on a $a \times b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$. On peut a donc $\big((b, 0{,}1), 0, a\big) \longmapsto \frac{a}{\frac{1}{b-0}-0} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = a \times b$.
   Si $b = 0$, on a $(b, 0{,}1) \longmapsto 0$ et donc $\big((b, 0{,}1), 0, a\big) \longmapsto 0 = a \times b$ également.

7. Si $a \neq b$ alors $-b = \frac{1}{\frac{1}{a-b}}$. On a donc $\big((a, b, 1), 0{,}1\big) \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{a-b}-0} = a - b$.
   Si $a = b$, on a $(a, b, 1) \longmapsto 0$ et donc $\big((a, b, 1), 0{,}1\big) \longmapsto 0 = a - b$ également.

8. Par exemple : $(0{,}1, a) \longmapsto -a$ pour tout $a \geq 0$.

9. Pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$ on a $a + b = a - (-b)$. En utilisant les questions 7 et 8 :
$$\big((a, (0{,}1, b), 1), 0{,}1\big) \longmapsto a + b$$

10. Décomposition du calcul :

    D'après la question 6 :
$$\big((112{,}0{,}1), 0{,}34\big) \longmapsto 34 \times 112$$
    D'après la question 9 :
$$\Big(\Big(\big((112{,}0{,}1), 0{,}34\big), (0{,}1{,}4), 1\Big), 0{,}1\Big) \longmapsto 34 \times 112 + 4$$
    D'après la question 8 :
$$(0{,}1{,}3) \longmapsto -3$$
    D'après la question 5 :
$$\bigg(\Big(\Big(\big((112{,}0{,}1), 0{,}34\big), (0{,}1{,}4), 1\Big), 0{,}1\Big), 0, (0{,}1{,}3)\bigg) \longmapsto \frac{-3}{34 \times 112 + 4}$$
    D'après la question 9 :
$$\Bigg(\Bigg(1, \bigg(0{,}1, \bigg(\Big(\Big(\big((112{,}0{,}1), 0{,}34\big), (0{,}1{,}4), 1\Big), 0{,}1\Big), 0, (0{,}1{,}3)\bigg)\bigg), 1\Bigg), 0{,}1\Bigg) \longmapsto 1 + \frac{-3}{34 \times 112 + 4}$$