www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'AMIENS 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

AMIENS 2022

Exercice 1 : Trois multiplications à l'étude

Partie 1 : Multiplication « per gelosia »

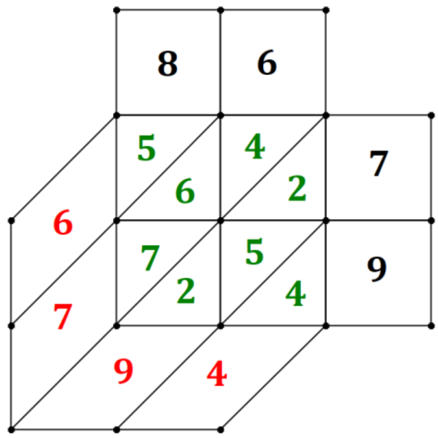
1. Multiplication per gelosia de 86 par 79.

Nous devons effectuer les opérations élémentaires suivantes :

Quatre multiplications : 6×9 ; 6×7 ; 8×9 ; 8×7.

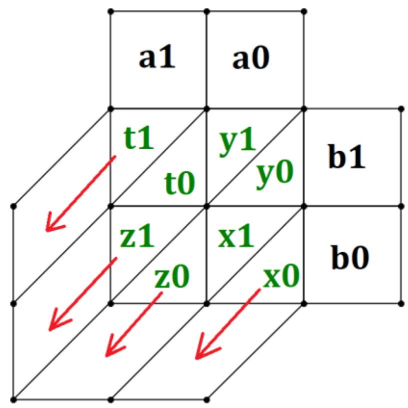
Quatre additions : $4 + 0$; $2 + 5 + 2$; $4 + 6 + 7$; $5 + 1$

(La première addition n'étant qu'un simple report).



2. Soit deux entiers a et b strictement compris entre 9 et 100, c'est-à-dire qui s'écrivent avec deux chiffres exactement.

Notons $a = \overline{a_1 a_0}$ et $b = \overline{b_1 b_0}$ les écritures de ces deux entiers en numération décimale, où a_1 et b_1 sont les chiffres des dizaines et où a_0 et b_0 sont les chiffres des unités. La multiplication per gelosia nécessite quatre multiplications (symbolisées en vert) et quatre additions (symbolisées par les flèches rouges).



Nous avons : $a \times b = (10a_1 + a_0) \times (10b_1 + b_0) = 100a_1b_1 + 10(a_1b_0 + a_0b_1) + a_0b_0$

Il y a quatre multiplications élémentaires $a_ib_j,\ i \in \{0\ ;\ 1\},\ j \in \{0\ ;\ 1\}$ à effectuer. Chaque multiplication d'un chiffre avec un autre chiffre donne un résultat qui s'écrit au plus avec deux chiffres. Il y a ensuite quatre chiffres à obtenir par quatre additions (les chiffres des unités, des dizaines, des centaines et des milliers).

En tout, huit opérations élémentaires.

3. Soit deux entiers *a* et *b* qui s'écrivent chacun avec *n* chiffres exactement.

Notons $a = \overline{a_{n-1} \dots a_0}$ et $b = \overline{b_{n-1 \dots} b_0}$ les écritures de ces deux entiers en numération décimale.

Nous avons : $a \times b = (10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_0) \times (10^{n-1}b_{n-1} + \cdots + b_0) = 10^{2n-2}a_{n-1}b_{n-1} + \cdots + a_0b_0$.

Chaque multiplication d'un chiffre avec un autre chiffre donne un résultat qui s'écrit avec deux chiffres au plus. Le résultat s'écrit avec au plus $2n$ chiffres car le produit $a_{n-1}b_{n-1}$ des chiffres de plus haut rang est un nombre qui peut s'écrire avec deux chiffres au plus.

Il y a n^2 multiplications élémentaires $a_ib_j,\ i \in \{0\ ; \dots ;\ n-1\},\ j \in \{0\ ; \dots ;\ n-1\}$ à effectuer. Il y a ensuite $2n$ chiffres à obtenir par $2n$ additions (depuis celui des unités jusqu'à celui de la puissance $(2n-1)^{\text{ème}}$).

Le nombre d'opérations élémentaires à effectuer est égal à $n^2 + 2n$.

Partie 2 : Multiplication « à l'indienne »

1. Multiplication « à l'indienne » de 47 par 28.

		4	7
		2	8
	5	5	
1	3	1	6

Opérations élémentaires effectuées :

1. $7 \times 8 = 56$ d'où 6 pour les unités et 5 en retenue.
2. $8 \times 4 = 32$
3. $2 \times 7 = 14$
4. $32 + 14 + 5 = 51$ d'où 1 pour les dizaines et 5 en retenue.
5. $2 \times 4 = 8$
6. $8 + 5 = 13$, c'est le nombre de centaines.

Il y a eu 6 opérations élémentaires à effectuer.

2. Soit deux entiers *a* et *b* strictement compris entre 9 et 100, c'est-à-dire qui s'écrivent avec deux chiffres exactement. Notons $a = \overline{a_1a_0}$ et $b = \overline{b_1b_0}$ les écritures de ces deux entiers en numération décimale, où a_1 et b_1 sont les chiffres des dizaine (non nuls) et où a_0 et b_0 sont les chiffres des unités.

Détaillons les opérations élémentaires à effectuer *a priori* :

1. $a_0 \times b_0$. Le chiffre des dizaines du résultat est éventuellement en retenue r_1.
2. $a_1 \times b_0$
3. $a_0 \times b_1$
4. $a_1 \times b_0 + a_0 \times b_1 + r_1$. Le chiffre des dizaines du résultat est éventuellement en retenue r_2.
5. $a_1 \times b_1$
6. $a_1 \times b_1 + r_2$

On n'effectue pas les multiplications dans lesquelles figure le chiffre 0. Mais ce chiffre, par hypothèse, ne peut être qu'un chiffre des unités, a_0 ou b_0. Or, les opérations élémentaires précédentes sont symétriques en notations a et b (1, 4 et 5 sont des opérations intrinsèquement symétriques et l'opération 3 est la symétrique de 2). Que l'on effectue la multiplication $a \times b$ ou bien la multiplication $b \times a$, on se dispense du même nombre d'opérations élémentaires.

On effectue le même nombre d'opérations élémentaires que l'on calcule la multiplication $a \times b$ ou que l'on calcule la multiplication $b \times a$.

3. Le détail des opérations élémentaires décrit dans la question précédente donne le nombre maximal d'opérations et montre que : $MAXi(2) = 6$.

Nous obtenons le nombre minimal d'opérations lorsque les chiffre des unités de chacun des deux nombres est un « 0 ». Dans ce cas, il suffit de multiplier entre eux les chiffres des dizaines des deux nombres et nous obtenons le nombre de centaines du résultat en une seule opération élémentaire.

$$MINi(2) = 1$$

Exemple. Multiplication « à l'indienne » de 40 par 20.

	4	0
	2	0
8	0	0

Opérations élémentaires effectuées :

- 0 est le chiffre des unités (ne nécessite aucune opération élémentaire)
- 0 est le chiffre des dizaines (ne nécessite aucune opération élémentaire).
- $2 \times 4 = 8$, c'est le nombre de centaines mais aussi le chiffre des centaines car ce nombre est < 10.

Il y a eu une seule opération élémentaire à effectuer.

Partie 3 : Multiplication « à la française »

1. Détaillons les opérations élémentaires à effectuer pour calculer 62×45 :

5×2. Le chiffre des dizaines du résultat est en retenue $r_1 = 1$; 5×6 ; $0 + 1$; 4×2 ; 4×6 ; $0 + 0$; $8 + 1$; $4 + 3$; $2 + 0$.

Nous arrivons bien à un total de 9 opérations.

2. Calculons ci-contre « à la française » le produit 47×28

Détaillons ci-dessous les opérations élémentaires :

		4	7
	$\times$	2	8
	3	7	6
	9	4	0
1	**3**	**1**	**6**

8×7, le chiffre des dizaines du résultat est en retenue $r_1 = 5$; 8×4 ; $2 + 5$; 2×7,le chiffre des dizaines du résultat est en retenue $r_2 = 1$; 2×4 ; $8 + 1$; $6 + 0$; $7 + 4$, le chiffre des dizaines du résultat est en retenue $r_3 = 1$; $9 + 3 + 1$.

Nous arrivons bien à un total de 9 opérations.

3. Calculons de deux façons différentes le produit 43×20 :

	4	**3**
$\times$	**2**	**0**
8	**6**	**0**

	2	**0**
$\times$	**4**	**3**
	6	**0**
8	**0**	
8	**6**	**0**

Dans le premier cas, les opérations élémentaires sont : 2×3 et 2×4 soit 2 opérations élémentaires.

Dans le deuxième cas, les opérations élémentaires sont : 3×0 ; 3×2 ; 4×0 ; 4×2 ; $0 + 0$; $6 + 0$; $0 + 8$ soit 7 opérations élémentaires.

Le nombre d'opérations élémentaires n'est pas le même suivant que l'on calcule 43×20 ou 20×43. Ce contre-exemple montre qu'il est faux d'affirmer que le nombre d'opérations élémentaires est indépendant de la place des nombres dans la multiplication posée à la française.

4.a. Le nombre minimal d'opérations élémentaires est obtenu lorsque le chiffre des unités du deuxième nombre est « 0 » et que les deux multiplications élémentaires à effectuer ne donnent lieu à aucune retenue. La multiplication 43×20 faite ci-dessus en est un exemple. $MINf(2) = 2$.

4.b. Le nombre maximal d'opérations élémentaires est obtenu lorsque toutes les multiplications élémentaires à effectuer donnent lieu à une retenue.
La multiplication 99×99 en est un exemple.
$MAXf(2) = 10$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 9 & 9 \\
 & \times & 9 & 9 \\
\hline
 & 8 & 9 & 1 \\
8 & 9 & 1 & \\
\hline
9 & 8 & 0 & 1
\end{array}
$$

Les opérations élémentaires sont les suivantes :

- ✓ 9×9 ; 9×9 ; $1 + 8$ pour les calculs de la première ligne (3 opérations élémentaires)
- ✓ Idem pour les calculs de la deuxième ligne.
- ✓ $1 + 0$; $9 + 1$; $9 + 8 + 1$; $8 + 1$ pour les quatre additions donnant les chiffres du résultat final.

4.c. Soit à effectuer la multiplication $a \times b$ de deux entiers a et b qui s'écrivent chacun avec n chiffres exactement.
Notons $a = \overline{a_{n-1} \dots a_0}$ et $b = \overline{b_{n-1} \dots b_0}$ les écritures de ces deux entiers en numération décimale.
Nous obtiendrons le nombre minimal d'opérations élémentaires lorsque $b = \overline{b_{n-1}00 \dots 0}$ et que les multiplications élémentaires $b_{n-1} \times a_k$ où $k = 0, \dots, n-1$ ne donnent lieu à aucune retenue. Dans ce cas, seules sont à effectuer ces n multiplications élémentaires : $MINf(n) = n$.

Pour obtenir le nombre maximal d'opérations élémentaires, étudions d'abord le nombre maximal d'opérations élémentaires lorsqu'on multiplie $a = \overline{a_{n-1} \dots a_0}$ par un entier à un seul chiffre c.

- ✓ $c \times a_0 = \overline{d_0 u_0}$; s'il est non nul, le chiffre des dizaines est une retenue r_1
- ✓ $c \times a_1 = \overline{d_1 u_1}$
- ✓ $u_1 + r_1$ s'il y a une retenue.
- ✓ …
- ✓ $c \times a_{n-1} = \overline{d_{n-1} u_{n-1}}$
- ✓ $u_{n-1} + r_{n-1}$ s'il y a une retenue.

Il y a ainsi un nombre maximal de $(2n - 1)$ opérations élémentaires, une première multiplication $c \times a_0$ puis $(n-1)$ paires d'opérations constituées chacune d'une multiplication éventuellement suivie d'une addition.

Lorsque nous multiplions $a = \overline{a_{n-1} \dots a_0}$ par $b = \overline{b_{n-1} \dots b_0}$, nous devons effectuer n multiplications sur le modèle ci-dessus et ensuite $2n$ additions pour obtenir les chiffres du résultat final.
En conséquence : $MAXf(n) = n \times (2n - 1) + 2n = n \times (2n + 1)$
En particulier, $MAXf(2) = 2 \times 5 = 10$.

Exercice 2 : Triangles rectangles isocèles et parabole

1. Un exemple.

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(1\,;1)$ et le vecteur $\overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées $(-1\,;1)$.

- $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{2}$, les côtés $[OA]$ et $[OC]$ du triangle OAC ont des longueurs égales.
- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 1 - 1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux, l'angle de sommet O du triangle OAC est un angle droit.

Le triangle OAC est rectangle isocèle.

La parabole $\wp$ est représentative de la fonction : $x \mapsto g(x) = x^2$. Du fait que : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(-1) = g(1) = 1 \end{cases}$, on déduit que O, A et C sont respectivement les points d'abscisse 0, 1 et -1 de la parabole $\wp$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(a\,;b)$ et le vecteur $\overrightarrow{MP}$ a pour coordonnées $(-b\,;a)$. Puisque les réels a et b ne sont pas tous deux nuls, ces vecteurs sont non nuls, les points M, N, P sont des points distincts.

- $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{a^2+b^2}$, les côtés $[MN]$ et $[MP]$ du triangle MNP ont des longueurs égales.
- $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = -ab + ba = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux, l'angle de sommet M du triangle MNP est un angle droit.

Le triangle MNP est rectangle isocèle.

3. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(a = t+1\,;\; b = t^2 - 1)$. Ce vecteur est non nul, et C et D sont des points distincts, à condition toutefois que $t \neq -1$. Nous supposerons désormais cette condition vérifiée.

Soit E un point du plan, de coordonnées $(x\,;y)$. Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées $(x+1\,;\; y-1)$.

En appliquant les résultats de la question précédente, nous pouvons proposer un point E susceptible d'être le troisième sommet d'un triangle rectangle isocèle de sommet C, en faisant en sorte que :

$\begin{cases} x+1 = -b = -t^2+1 \\ y-1 = a = t+1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_E = -t^2 \\ y_E = t+2 \end{cases}$. Coordonnées de ce point E : $(-t^2\;;\;t+2)$.

4. La parabole $\wp$ étant représentative de la fonction $x \mapsto g(x) = x^2$, le point E appartient à $\wp$ si et seulement si $y_E = g(x_E)$, c'est-à-dire si et seulement si : $t + 2 = (-t^2)^2$, ou encore si et seulement si : $t^4 = t + 2$.

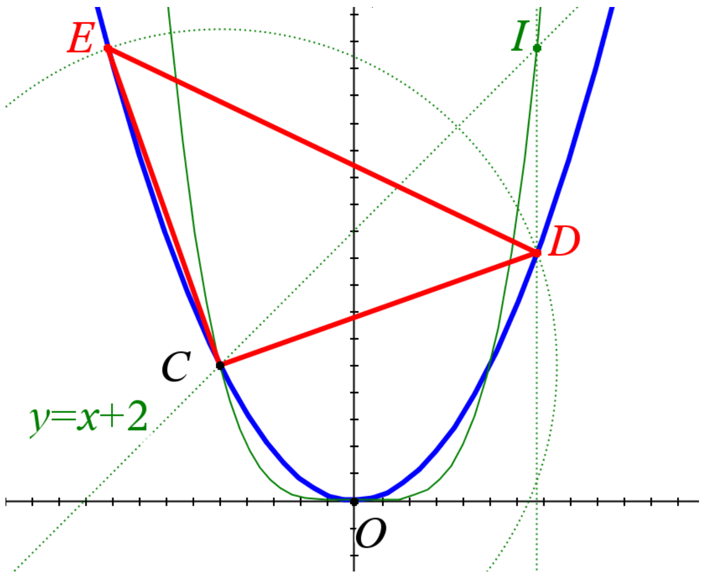
(NB. On suppose toujours que $t \neq -1$)

5. On trace la droite d'équation $y = x + 2$.

Cette droite coupe la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^4$ en deux points, le point C et un deuxième point I. Les abscisses de ces deux points sont solution de l'équation $x^4 = x + 2$.

La parallèle à l'axe des ordonnées menée par I coupe la parabole $\wp$ en un point D de même abscisse que I.

On trace alors le cercle de centre C passant par D. Ce cercle recoupe la parabole $\wp$ en un point E qui est le troisième sommet d'un triangle rectangle isocèle CDE inscrit dans la parabole (triangle rouge sur la figure).



6. La fonction f est dérivable sur $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$ et sa dérivée est la fonction $t \longmapsto f'(t) = 4t^3 - 1$.

Pour tout réel t appartenant à $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$, on dispose de l'inégalité $t^3 \geq 1$ qui implique que $f'(t) \geq 3 > 0$.

La dérivée de f est une fonction strictement positive sur $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$ donc :

f est strictement croissante sur cet intervalle $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$.

Le calcul montre que : $f(1) = -2$ et que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{16}$.

Variations de f : Sur l'intervalle $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$:

f est strictement croissante de la valeur strictement négative -2 à la valeur strictement positive $\frac{25}{16}$.

NB. C'est un corollaire du « théorème des valeurs intermédiaires » qui justifie la propriété admise par l'énoncé. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ (c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires) alors il existe au moins un réel α appartenant à $]a\,;\,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Si de plus f est strictement monotone sur $[a\,;b]$, alors ce réel α est unique.

Ce corollaire s'applique ici sur l'intervalle $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur cet intervalle, et les images de 1 et de $\frac{3}{2}$ sont de signes contraires, il existe un réel unique α appartenant à $\left]1\,;\,\frac{3}{2}\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

7.a. Pour répondre à cette question, nous avons rédigé un algorithme Python qui construit les intervalles $[a_i\ ;\ b_i]$ jusqu'à celui de rang 3 (pour faire bonne mesure …).

La réponse à la question posée est l'intervalle $[1{,}25\ ;\ 1{,}375]$, c'est-à-dire l'intervalle $\left[\frac{5}{4}\ ;\ \frac{11}{8}\right]$.

```
>>> def dicho():
        a=1
        b=3/2
        for n in range(1,4):
                print("Etape numéro",n)
                c=(a+b)/2
                if c**4-c-2>0:
                        b=c
                else :
                        a=c
                print(a,"et",b,"ont des images de signes contraires")
                print("nouvel intervalle :",[a,b])

>>> dicho()
Etape numéro 1
1.25 et 1.5 ont des images de signes contraires
nouvel intervalle : [1.25, 1.5]
Etape numéro 2
1.25 et 1.375 ont des images de signes contraires
nouvel intervalle : [1.25, 1.375]
Etape numéro 3
1.3125 et 1.375 ont des images de signes contraires
nouvel intervalle : [1.3125, 1.375]
```

7.b. Pour répondre à cette question, nous devons admettre un résultat, à savoir que la solution autre que -1 de l'équation $t^4 - t - 2 = 0$ n'est pas un nombre rationnel. Ce résultat étant admis, la réponse est « non, c'est impossible ». En effet, par construction, les nombres a_n et b_n sont tous des nombres rationnels.

NB. Notons que $t^4 - t - 2 = (t+1)(t^3 - t^2 + t - 2)$.

La solution autre que -1 vérifie l'équation : $t^3 - t^2 + t - 2 = 0$.

Voici une démonstration (probablement non exigible dans le contexte du sujet) de l'irrationnalité de cette solution.

Supposons qu'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ soit solution.

Alors : $p^3 - qp^2 + pq^2 - 2q^3 = 0$. Soit : $p(p^2 - qp + q^2) = 2q^3$

L'entier p divise $2q^3$ et est premier avec q, donc il divise 2.

- Ou bien il est égal à 1, auquel cas $1 - q + q^2 - 2q^3 = 0$, équation qui n'a pas de solution entière.
- Ou bien il est égal à 2, auquel cas $8 - 4q + 2q^2 - 2q^3 = 0$, et donc $4 - 2q + q^2 - q^3 = 0$, équation qui n'a pas non plus de solution entière.

L'hypothèse d'existence d'une solution rationnelle aboutit à des impasses, elle doit être rejetée.

Exercice 3 : La société « LockyLock »

Quelques éléments de réponse

Partie I

1.a. L'ensemble des codes à trois chiffres :

$$\{000\ ;\ 001\ ;\ 010\ ;\ 100\ ;\ 011\ ;\ 101\ ;110\ ;\ 111\}$$

1.b. Nous trouvons $2^3 = 8$ codes possibles car chacun des chiffres du code peut être soit un « 0 » soit un « 1 », nous avons 2 choix possibles pour chaque chiffre.

1.c. L'intrus devra entrer $3 \times 8 = 24$ chiffres.

1.d. L'énoncé nous donne la réponse un peu plus loin : 0001110100. Nous le démontrerons quand on nous le demandera.

Moralité : Il est toujours avantageux de commencer par lire l'énoncé jusqu'au bout.

2.a et b. Le nombre de codes possibles avec 7 chiffres est $2^7 = 128$ puisque pour chaque chiffre du code, deux choix se présentent. Si un intrus veut taper successivement tous les codes, il devra taper $128 \times 7 = 896$ chiffres, soit plus de 800 chiffres comme le dit la publicité.

Partie II

1.a. L'ensemble des codes à deux chiffres :

$$\{00\ ;\ 01\ ;\ 10\ ;\ 11\}$$

1.b. La séquence 00110 est intéressante car elle contient tous les codes à deux chiffres, comme les surbrillances le montrent : 00110 ; 00110

2. Mettons en évidence par des surbrillances les codes à trois chiffres dans la séquence 0001110100 :

0001110100 ; 0001110100 ; 0001110100.

Ils y sont tous. Ils ne peuvent y être qu'une seule fois car nous avons épuisé tous les assemblages de trois chiffres consécutifs inclus dans cette séquence.

3. Il y a $2^4 = 16$ codes à 4 chiffres. Examinons la séquence proposée 0000111101100101000 en utilisant des surbrillances : 0000111101100101000. Nous obtenons 4 codes. En décalant les surbrillances d'un cran, nous en obtenons 4 autres : 0000111101100101000, et de deux crans, encore 4 : 0000111101100101000 et de trois crans, nous obtenons les 4 derniers codes : 0000111101100101000.

4. En écrivant une séquence adéquate, nous pouvons obtenir en une seule écriture plusieurs codes emboîtés. Sans prétendre trouver la séquence idéale, qui donnerait tous les codes avec une longueur minimale, considérons par exemple la séquence suivante, de 49 chiffres, qui nous donne (nous semble-t-il) au moins 25 codes différents.

0000000111111011000010100011000010110011010000000
0000000111111011000010100011000010110011010000000
0000000111111011000010100011000010110011010000000
0000000111111011000010100011000010110011010000000

Même si nous tapons les 103 codes restants, il nous faudra effectuer au plus 721 appuis sur le digicode.

$721 + 49 = 770$, nous sommes en dessous du seuil de 800 appuis.

Il est d'ailleurs clair qu'on peut mieux faire.

Quoi qu'il en soit, il existe des séquences qui permettent d'obtenir un déverrouillage en moins de 800 appuis. La publicité de LockyLock n'est pas correcte.