Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 dont une annexe en page 6/6 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

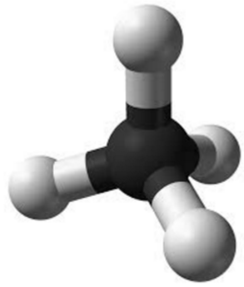
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.



L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.

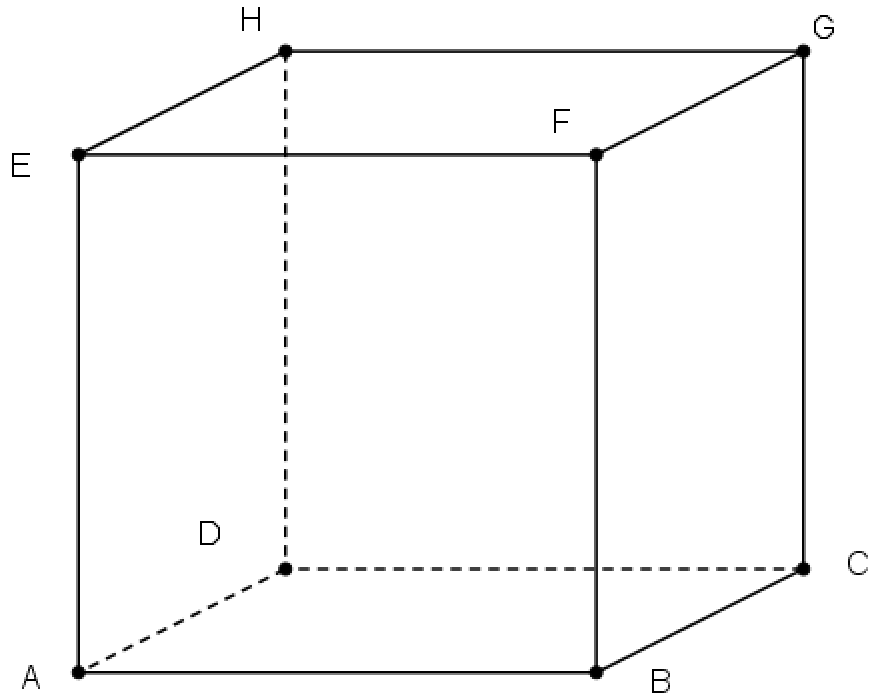
Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube $ABCDEFGH$ en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.
   Représenter la molécule dans le cube donné en **annexe** page 6/6.

   Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.
2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.
3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

Annexe

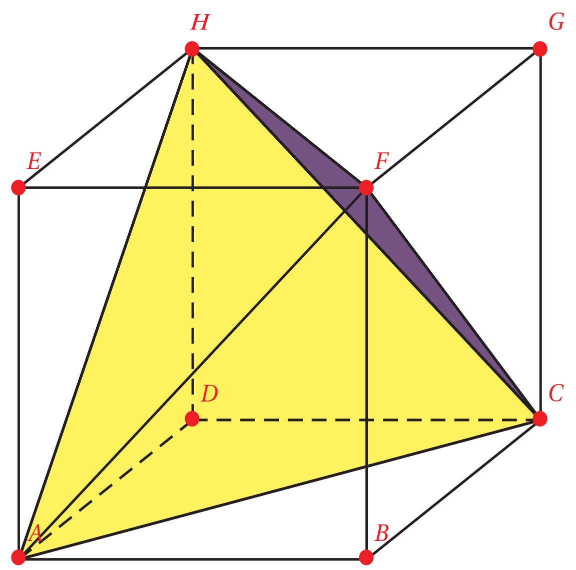
À rendre avec la copie



EXERCICE 3

[Polynésie 2017]

1. **Justifions**:



Notons que les faces du cube sont des carrés dont chaque côté a pour longueur AB.

Donc, les segments (ou diagonales) [AC], [CF], [FA], [AH], [FH] et [CH] ont tous une longueur identique.

Ainsi, les 4 faces du tétraèdre ACFH sont des triangles équilatéraux et ce tétraèdre peut être inscrit dans un cube ABCDEFGH, en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.

2. Démontrons que l'atome de carbone est au centre Ω du cube:

Pour le montrer, nous allons procéder en 2 étapes.

Etape 1: Détermination du centre Ω du cube ABCDEFGH.

Le point Ω correspond au milieu du segment [BH].

(ou: [AG], [FD], [EC])

Or: B (1 ; 0 ; 0) et H (0 ; 1 ; 1), dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point Ω sont: $\Omega\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Etape 2: Détermination du centre W (x ; y ; z) du tétraèdre régulier.

L'atome de carbone W (x ; y ; z) au centre du tétraèdre régulier est tel que:

WA = WC = WF = WH, avec: A (0 ; 0 ; 0), C (1 ; 1 ; 0), F (1 ; 0 ; 1) et H (0 ; 1 ; 1).

$$WA = WC = WF = WH \iff \begin{cases} WC^2 = WA^2 \\ WF^2 = WA^2 \\ WH^2 = WA^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1 - x)^2 + (1 - y)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ (1 - x)^2 + y^2 + (1 - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + (1 - y)^2 + (1 - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

D'où, les coordonnées du point W sont: $W\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Au total, comme les points Ω et W sont les mêmes: l'atome de carbone est bien au centre du cube.

3. Déterminons " θ ", l'angle $\widehat{A\Omega C}$:

D'après le cours, nous savons que l'angle θ entre 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est tel que: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$.

Nous devons calculer l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

Or:
- $\overrightarrow{\Omega A}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$,
- $\overrightarrow{\Omega C}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

D'où:
- $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega C} = \left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow \overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega C} = -\frac{1}{4}$,
- $\|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \|\overrightarrow{\Omega A}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $\|\overrightarrow{\Omega C}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \|\overrightarrow{\Omega C}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi: $\cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 109{,}5^\circ$ arrondi au dixième de degré.

Au total: $\widehat{A\Omega C} = 109{,}5^\circ$.