Exercice 2 (4 points) Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on donne les points :

$A(1,2,3)$, $B(3,0,1)$, $C(-1,0,1)$, $D(2,1,-1)$, $E(-1,-2,3)$ et $F(-2,-3,4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0,1,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2016]

1. **Affirmation 1**: " Les trois points A, B et C sont alignés ".

C'est faux.

Justifions le.

Soient les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

D'après le cours: les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi il existe un réel α tel que: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 2 = -2\alpha \\ -2 = -2\alpha \\ -2 = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Or: $-1 \neq 1$, donc le système est impossible.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Au total: Les 3 points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **Affirmation 2**: " $\vec{n}$ (0; 1; -1) est un vecteur normal au plan (ABC) ".

C'est vrai.

Justifions le.

D'après le cours: un vecteur $\vec{n}$ $(a\,;b\,;c)$ est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici: • il s'agit du plan (ABC);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix};$$

• $\vec{n}$ $(0\,;1\,;-1)$.

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux car $(0 \times 2) + (1 \times -2) + (-1 \times -2) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux car $(0 \times -2) + (1 \times -2) + (-1 \times -2) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\vec{n}$ $(0\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Affirmation 3: " La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

Etape 1: Représentation paramétrique de la droite (EF).

Soient: • le vecteur $\overrightarrow{EF}$ avec: $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (EF) avec: $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

D'où, la représentation paramétrique de la droite passant par E et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Etape 2: Détermination d'une équation cartésienne du plan (ABC).

Ici: • $\vec{n}$ $(a = 0 ; b = 1 ; c = -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC);

• $A(1 ; 2 ; 3)$ est un point de l'espace.

D'où, une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\iff (y - 2) - (z - 3) = 0$

$\Rightarrow y - z + 1 = 0.$

Etape 3: Détermination du point d'intersection $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ entre la droite (EF) et le plan (ABC).

Le point M vérifie: • $\begin{cases} x_M = -1 - t \\ y_M = -2 - t \\ z_M = 3 + t \end{cases}$

et: • $y_M - z_M + 1 = 0 \quad (1).$

Dans ces conditions: $(1) \iff (-2 - t) - (3 + t) + 1 = 0$

$\Rightarrow t = -2.$

Les coordonnées du point M, avec $t = -2$, sont donc: $M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Or le milieu du segment [BC] est:

$$I\begin{pmatrix}\frac{(3-1)}{2}\\\frac{(0+0)}{2}\\\frac{(1+1)}{2}\end{pmatrix} \text{ cad } I\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Au total: Comme $M = I$, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en :

$$I\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

4. Affirmation 4: " Les droites (AB) et (CD) sont sécantes ".

C'est faux.

Justifions le.

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (AB) passe par le point A et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

• la droite (CD) passe par le point C et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}'\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la représentation paramétrique de la droite (AB) est:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Et, la représentation paramétrique de la droite (CD) est:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t' \\ y = t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases} \quad , t' \in \mathbb{R}.$$

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes ssi leur point d'intersection vérifie le système:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -1 + 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 3 - 2t = 1 - 2t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t - 3t' = -2 \\ 2t + t' = 2 \\ -2t + 2t' = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2t - 3t' = -2 & (1) \\ 2t + t' = 2 & (2) \\ t' = -1 + t \end{cases}$$

En remplaçant t' par " $-1+t$ " dans les équations (1) et (2), nous avons:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2t - 3(-1+t) = -2 \\ 2t + (-1+t) = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Or: $5 \neq 1$, donc le système est impossible.

Au total: Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.