Corrigé

Exercice 3

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU LUNDI 11 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 3 – Pour tous les candidats (7 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».

Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C.
Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire M_{A} qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [850 ; x], où x est un nombre réel supérieur à 1200.
La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_{B} qui suit une loi normale de moyenne 1050 et d'écart-type inconnu σ.
Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer x.

2. Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes.
Déterminer l'écart-type σ de la variable aléatoire M_{B}. En donner la valeur arrondie à l'unité.

3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes.
Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

Partie B

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :
- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

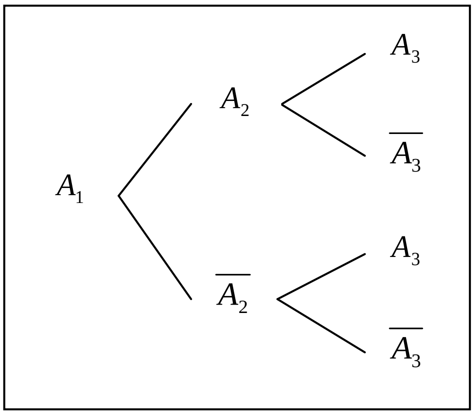
On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $P(A_1) = 1$.

1. a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

b) Démontrer que $P(A_3) = 0,85$.

c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0,5\,p_n + 0,4$.

3. **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_n > 0,8$.

b) Démontrer que la suite $\left(p_n\right)$ est décroissante.

c) La suite $\left(p_n\right)$ est-elle convergente ?

4. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

a) Démontrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de *n*.

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$.

EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2018]

Partie A:

1. Déterminons x:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- M_A suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\,850\,;\,x\,]$.

Dans ces conditions:

- $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-850} & \text{si } t \in [\,850\,;\,x\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- $E(M_A) = \dfrac{850 + x}{2}$.

- $P(a \leqslant M_A \leqslant b) = \left[\dfrac{t}{x-850} \right]_a^b$.

Ici, il s'agit de déterminer x sachant que: $P(900 \leqslant M_A \leqslant 1200) = 75\%$.

Or: $P(900 \leqslant M_A \leqslant 1200) = \left[\dfrac{t}{x-8500} \right]_{900}^{1200}$

$$= \frac{300}{x-850}.$$

D'où: $P(900 \leqslant M_A \leqslant 1200) = 75\% \iff \dfrac{300}{x-850} = 75\%$

$\Rightarrow x = 1250 \text{ g} > 1200 \text{ g}.$

Au total: M_A suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850 ; 1250]$.

2. Déterminons l'écart type σ de la variable aléatoire M_B:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- M_B suit la loi normale d'espérance $\mu = 1050$ g et d'écart type $\sigma = ?$
- T suit la loi normale centrée réduite.

Ici, il s'agit de déterminer σ sachant que: $P(900 \leqslant M_B \leqslant 1200) = 85\%$.

Or: $P(900 \leqslant M_B \leqslant 1200) = P\left(\frac{900 - 1050}{\sigma} \leqslant \frac{M_B - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{1200 - 1050}{\sigma}\right)$

$$= P\left(-\frac{150}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{150}{\sigma}\right)$$

$$= 2 \times P\left(T \leqslant \frac{150}{\sigma}\right) - 1.$$

D'où: $P(900 \leqslant M_B \leqslant 1200) = 85\% \iff 2 \times P\left(T \leqslant \frac{150}{\sigma}\right) - 1 = 85\%$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{150}{\sigma}\right) = 92,5\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{150}{\sigma} \approx 1,4395 \Rightarrow \sigma \approx 104 \text{ g},$$ **arrondie à l'unité.**

Au total: la variable aléatoire M_B suit une loi normale d'espérance $\mu = 1050$ g et d'écart type $\sigma = 104$ g.

3. Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

Ici, nous avons: • $n = 400$

• $p = 80\%$

• $f = \frac{294}{400} \Rightarrow f = 73,5\%$.

Dans ces conditions:

$n = 400 \geq 30$, $n \cdot p = 320 \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) = 80 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[80\% - 1,96 \times \sqrt{\frac{80\% \times 20\%}{400}} ; 80\% + 1,96 \times \sqrt{\frac{80\% \times 20\%}{400}} \right]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I = [\, 0,7608 \, ; \, 0,8392 \,]$.

Or la fréquence " f ", sur l'échantillon, est telle que: $f = 73,5\% \notin I$.

Ainsi, **oui** le détaillant a raison de douter de l'affirmation du maraîcher C.

Partie B:

1. a. Reproduisons et complétons l'arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

• A_n = " le client achète un melon au cours de la semaine n ".

• $\overline{A}_n$ = " le client n'achète pas de melon au cours de la semaine n ".

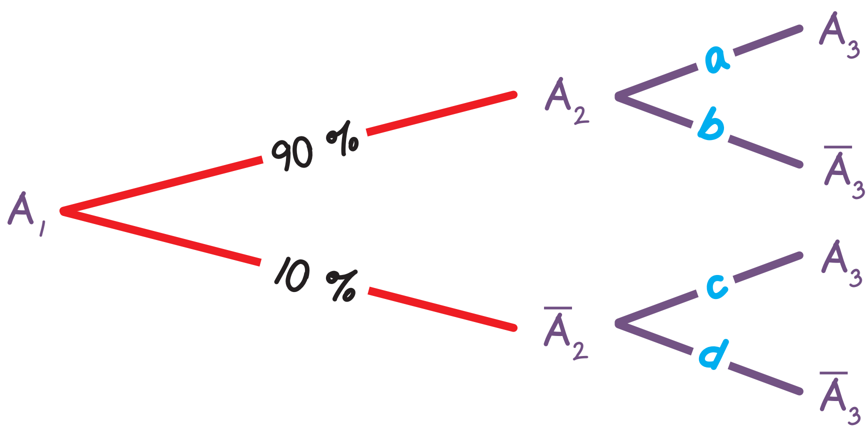
• $P_{A_{n-1}}(A_n) = 90\%$

• $P_{A_{n-1}}(\overline{A}_n) = 1 - 90\% = 10\%$.

• $P_{\overline{A}_{n-1}}(\overline{A}_n) = 60\%$

• $P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n) = 1 - 60\% = 40\%$.

Dans ces conditions, nous avons l'arbre de probabilités suivant:



, avec:
- $a = 90\%$
- $b = 10\%$
- $c = 40\%$
- $d = 60\%$

1. b. Montrons que $P(A_3) = 85\%$:

Calculons: $P(A_3)$.

L'événement $A_3 = (A_3 \cap A_2) \cup (A_3 \cap \overline{A}_2)$.

D'où: $P(A_3) = P(A_3 \cap A_2) + P(A_3 \cap \overline{A}_2)$

$= P_{A_2}(A_3) \times P(A_2) + P_{\overline{A}_2}(A_3) \times P(\overline{A}_2)$.

Ainsi: $P(A_3) = 90\% \times 90\% + 40\% \times 10\%$ => $P(A_3) = 85\%$.

Au total, nous avons bien: $P(A_3) = 85\%$.

1. c. Calculons $P_{A_3}(A_2)$:

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_3)}$$

$$= \frac{P_{A_2}(A_3) \times P(A_2)}{P(A_3)}.$$

Ainsi: $P_{A_3}(A_2) = \dfrac{90\% \times 90\%}{85\%}$ => $P_{A_3}(A_2) \approx 95\%$, arrondi au centième.

Au total, sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est de: 95%.

2. Démontrons que pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,5\, p_n + 0,4$:

Nous avons, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$ et $p_{n+1} = P(A_{n+1})$.

L'événement $A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap \overline{A_n})$.

D'où: $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$

$$= P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \times P(\overline{A_n}).$$

Ainsi: $P(A_{n+1}) = 90\% \times P(A_n) + 40\% \times P(\overline{A_n})$

$$= 90\% \times p_n + 40\% \times (1 - p_n)$$

=> $p_{n+1} = 0,5 \times p_n + 0,4$.

Au total, nous avons bien: $p_{n+1} = 0,5 \times p_n + 0,4$.

3. a. Démontrons que la suite (p_n) est décroissante:

Nous devons ici déterminer le signe de: $p_{n+1} - p_n$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} - p_n = 0,5\, p_n + 0,4 - p_n$

$= - 0,5\, p_n + 0,4$.

Or, d'après l'énoncé: pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$.

Dans ces conditions: $p_n > 0,8 \iff - p_n < - 0,8$

$\iff - 0,5\, p_n < - 0,4$

$\iff - 0,5\, p_n + 0,4 < 0$.

Comme $- 0,5\, p_n + 0,4 < 0$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et par conséquent: la suite (p_n) est strictement décroissante.

3. b. Montrons que la suite (p_n) est convergente:

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- (p_n) est minorée par $m = 0,8$
- (p_n) est strictement décroissante pour tout entier $n \geqslant 1$.

Donc nous pouvons affirmer que: la suite (p_n) est convergente.

4. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera V_1 et la raison q:

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$V_n = p_n - 0,8 \iff V_{n+1} = p_{n+1} - 0,8$

$\iff V_{n+1} = (0,5 \times p_n + 0,4) - 0,8 \quad (1)$.

Or: $V_1 = p_1 - 0,8 \Rightarrow V_1 = 0,2$ et $p_n = V_n + 0,8$.

Ainsi: (1) $\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,5\,[\,V_n + 0,8\,] + 0,4) - 0,8$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,5\,V_n$.

Par conséquent (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $V_1 = 0,2$.

4. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,5\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_1 \times (0,5)^{(n-1)}, \text{ avec: } V_1 = 0,2.$$

4. b. b2. Déduisons-en que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{(n-1)}$:

Nous savons que: * $V_n = 0,2 \times (0,5)^{(n-1)}$

* $p_n = V_n + 0,8$.

D'où: $p_n = 0,2 \times (0,5)^{(n-1)} + 0,8$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. c. Déterminons la limite de la suite (p_n):

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} 0,2 \times (0,5)^{(n-1)} + 0,8$$

$$= 0,8 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,5)^{(n-1)} = 0, \quad \text{car: } 0,5 \in \,]\,0\,;1\,[.$$

La suite (p_n) est donc bien convergente et converge vers **0,8**.