

Corrigé

Exercice 2



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages
numérotées de 1/8 à 8/8 .**

EXERCICE 2 (7 points)

Une entreprise s'intéresse au nombre d'écrans 3D qu'elle a vendus depuis 2010 :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'écrans 3D vendus	0	5 000	11 000

Le nombre d'écrans 3D vendus par l'entreprise l'année $(2010 + n)$ est modélisé par une suite (u_n) , arithmético-géométrique, de premier terme $u_0 = 0$.

On rappelle qu'une suite arithmético-géométrique vérifie, pour tout entier naturel n , une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a \times u_n + b$ où a et b sont deux réels.

- (a) En supposant que $u_1 = 5\,000$, déterminer la valeur de b .

(b) En supposant de plus que $u_2 = 11\,000$, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 1,2 \times u_n + 5\,000.$$

- (a) Calculer u_3 et u_4 .

(b) En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu respectivement 18 000 et 27 000 écrans 3D.
La modélisation semble-t-elle pertinente ?

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'écrans 3D que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n + 25\,000.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.
Préciser la valeur de son premier terme v_0 .

(b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000$.

4. On souhaite connaître la première année pour laquelle le nombre de ventes d'écrans 3D dépassera 180 000 unités.

(a) Prouver que résoudre l'inéquation $u_n > 180\,000$ revient à résoudre l'inéquation $1,2^n > 8,2$.

(b) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine et affiche le plus petit entier naturel n , solution de l'inéquation $1,2^n > 8,2$.

Variables :	N est un entier naturel W est un nombre réel
Initialisation :	N prend la valeur 0 W prend la valeur ...
Traitement :	Tant que W prend la valeur $W \times 1,2$ Fin du Tant que
Sortie :	Afficher ...

(c) Déterminer cet entier naturel n .

5. À partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an du nombre de ses ventes d'écrans 3D. Combien d'écrans 3D peut-elle prévoir de vendre en 2025 ?

EXERCICE 2

[Polynésie 2016]

1. a. En supposant que $U_1 = 5000$, déterminons b :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- $U_{n+1} = a \times U_n + b$
- $U_0 = 0$
- $U_1 = 5000$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } U_1 = 5000 &\Leftrightarrow 5000 = a \times U_0 + b \\ &\Leftrightarrow 5000 = a \times 0 + b \\ &\Rightarrow b = 5000. \end{aligned}$$

$$\text{Au total: } U_{n+1} = a \times U_n + 5000.$$

1. b. Montrons que, pour tout entier naturel n , $a = 1, 2$:

A présent, nous savons que:

- $U_{n+1} = a \times U_n + 5000$
- $U_1 = 5000$
- $U_2 = 11000$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } U_2 = a \times U_1 + 5000 &\Leftrightarrow 11000 = a \times 5000 + 5000 \\ &\Rightarrow a = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\text{Au total, nous avons bien: } U_{n+1} = 1, 2 \times U_n + 5000.$$

2. a. Calculons U_3 et U_4 :

- Il s'agit de calculer U_3 :

$$U_3 = 1,2 \times U_2 + 5000 \Rightarrow U_3 = 18200 \text{ \u00e9crans 3D.}$$

- Il s'agit de calculer U_4 :

$$U_4 = 1,2 \times U_3 + 5000 \Rightarrow U_4 = 26840 \text{ \u00e9crans 3D.}$$

2. b. La mod\u00e9lisation semble-t-elle pertinente ?

- En 2013, l'entreprise a vendu 18000 \u00e9crans 3D.

Or, pour 2013, le mod\u00e8le nous donne 18200 \u00e9crans 3D.

Donc, \u00e0 200 \u00e9crans pr\u00e8s, oui la mod\u00e9lisation est pertinente.

- En 2014, l'entreprise a vendu 27000 \u00e9crans 3D.

Or, pour 2014, le mod\u00e8le nous donne 26840 \u00e9crans 3D.

Donc, \u00e0 160 \u00e9crans pr\u00e8s, oui la mod\u00e9lisation est pertinente.

3. a. Montrons que (V_n) est g\u00e9om\u00e9trique et d\u00e9terminons V_0 et q :

$$V_n = U_n + 25000 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} + 25000$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (1,2 \times U_n + 5000) + 25000 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 + 25000 \Rightarrow V_0 = 25000 \text{ et } U_n = V_n - 25000.$$

$$\text{Ainsi: } (1) \Leftrightarrow V_{n+1} = (1,2 [V_n - 25000] + 5000) + 25000$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = 1,2 V_n.$$

Par cons\u00e9quent, (V_n) est bien une suite g\u00e9om\u00e9trique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $V_0 = 25000$.

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , $U_n = 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000$:

- Comme $V_{n+1} = 1,2 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (1,2)^n, \text{ avec: } V_0 = 25\,000.$$

- De plus, nous savons que: * $V_n = 25\,000 \times (1,2)^n$
* $U_n = V_n - 25\,000$.

D'où: $U_n = 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000$.

4. a. Résolvons l'inéquation $U_n > 180\,000$:

$$U_n > 180\,000 \Leftrightarrow 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000 > 180\,000$$

$$\Leftrightarrow 25\,000 \times 1,2^n > 205\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,2^n > \frac{205\,000}{25\,000}^*$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,2) > \ln\left(\frac{205}{25}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{205}{25}\right)}{\ln(1,2)}, \text{ car: } 1,2 > 1, \text{ et donc: } \ln(1,2) > 0$$

$$\Rightarrow n > 11,5407.$$

Nous prendrons $n = 12$ ans car n est un entier naturel.

Au total, il faudra attendre 12 ans, cad 2022, pour que le nombre de ventes d'écrans 3D dépasse 180 000 unités.

Notons que: * $\Leftrightarrow 1,2^n > \frac{205}{25}$

$$\Rightarrow 1,2^n > 8,2, \text{ comme demandé !}$$

4. b. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

Variables:	...		
Initialisation:	N prend la valeur 0 W prend la valeur 1		
Traitement:	Tant que $W \leq 8, 2$ <table border="0" style="margin-left: 40px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">W prend la valeur $W \times 1, 2$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">N prend la valeur $N + 1$</td> </tr> </table> Fin du Tant que	W prend la valeur $W \times 1, 2$	N prend la valeur $N + 1$
W prend la valeur $W \times 1, 2$			
N prend la valeur $N + 1$			
Sortie:	Afficher N		

4. c. Déterminons cet entier naturel n:

Comme nous l'avons dit à la question 4. a.: $n = 12$ ans.

5. Déterminons combien d'écrans 3D, l'entreprise peut prévoir de vendre en 2025, compte tenu d'une baisse de 15% par an à partir de 2023:

- En 2022 (2010 + 12 ans), le nombre d'écrans vendus sera de:

$$U_{12} = 25\,000 \times (1, 2)^{12} - 25\,000$$

$$\text{cad: } U_{12} = 197\,902, 51 \Rightarrow U_{12} \approx 197\,903 \text{ écrans 3D vendus.}$$

- Or à partir de 2023, l'entreprise devra faire face à une baisse de 15% par an.

Donc en 2025, cad 3 années après 2022, le nombre d'écrans vendus sera

$$\text{de: } U_{15} = U_{12} (1 - 15\%)^3$$

$$\text{soit: } U_{15} = 121537,18$$

$$\text{cad: } U_{15} \approx 121538 \text{ écrans 3D vendus.}$$

L'entreprise peut ainsi prévoir de vendre 121538 écrans 3D en 2025.