

Corrigé

Exercice 1



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°1 (6 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :

- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

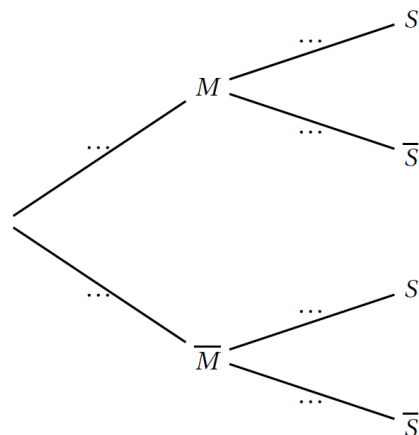
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

a. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$; $P_M(S)$ et $P_{\bar{M}}(\bar{S})$.

b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



c. Montrer que : $P(S) = 0,02192$.

d. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}).

Commenter le résultat obtenu.

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
- c. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
- la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
 - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
- d. Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leq n) \geq 0,9$.

EXERCICE 1

[Liban 2018]

1. a. Déterminons $P(M)$, $P_M(S)$, $P_{\bar{M}}(\bar{S})$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- S = " le voyageur fait sonner le portique ".
- \bar{S} = " le voyageur ne fait pas sonner le portique ".
- M = " le voyageur porte un objet métallique ".
- \bar{M} = " le voyageur ne porte pas d'objet métallique ".

$$\bullet P(M) = \frac{1}{500}$$

$$\bullet P(\bar{M}) = 1 - \frac{1}{500} = \frac{499}{500}$$

$$\bullet P_M(S) = 98\%$$

$$\bullet P_M(\bar{S}) = 1 - 98\% = 2\%$$

$$\bullet P_{\bar{M}}(S) = 1 - 98\% = 2\%$$

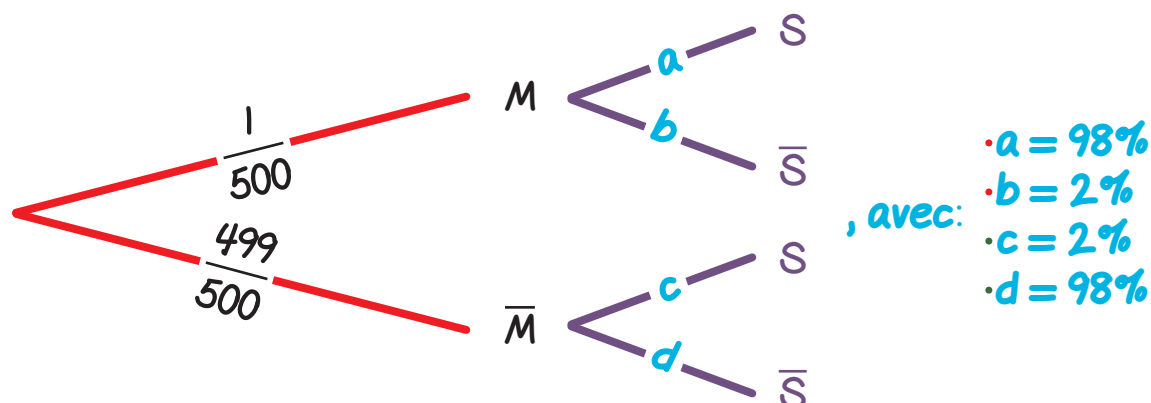
$$\bullet P_{\bar{M}}(\bar{S}) = 98\%$$

Dans ces conditions: $P(M) = \frac{1}{500}$, $P_M(S) = 98\%$ et $P_{\bar{M}}(\bar{S}) = 98\%$.

Au total: $P(M) = \frac{1}{500}$, $P_M(S) = 98\%$ et $P_{\bar{M}}(\bar{S}) = 98\%$.

1. b. Traduisons la situation par un arbre pondéré:

Nous avons l'arbre pondéré suivant:



1. c. Montrons que $P(S) = 0,02192$:

Nous devons calculer: $P(S)$.

Or, l'événement $S = (S \cap M) \cup (S \cap \bar{M})$.

D'où: $P(S) = P(S \cap M) + P(S \cap \bar{M})$

$$= P_M(S) \times P(M) + P_{\bar{M}}(S) \times P(\bar{M}).$$

$$\text{Ainsi: } P(S) = 98\% \times \frac{1}{500} + 2\% \times \frac{499}{500} \Rightarrow P(S) = 0,02192.$$

Au total, nous avons bien: $P(S) = 0,02192$.

1. d. Déduisons-en la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique:

Cela revient à calculer: $P_S(M)$.

$$P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)}$$

$$= \frac{P_M(S) \times P(M)}{P(S)}$$

$$\text{Ainsi: } P_S(M) = \frac{98\% \times \frac{1}{500}}{0,02192} \Rightarrow P_S(M) \approx 8,9\%, \text{ arrondi à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Au total: 8,9% des passagers portent un objet métallique sachant qu'ils ont fait sonner le portique.

2. a. Justifions que X suit une loi binômiale dont on précisera les paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant à prendre au hasard 80 personnes qui s'apprêtent à passer le portique de sécurité: on suppose que le nombre total de voyageurs est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

Soient les événements $S =$ " le voyageur fait sonner le portique ", et $\bar{S} =$ " le voyageur ne fait pas sonner le portique ".

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes.

Nous sommes en présence de 80 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de S suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 80$ et $p = 2,192\%$.

Et, nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(80; 2,192\%)$.

En fait, on répète 80 fois un schéma de Bernoulli.

2. b. Calculons $E(X)$ et interprétons:

D'après le cours: $E(X) = n \cdot p$.

D'où ici: $E(X) = 80 \times 2,192\%$ cad: $E(X) = 1,7536$.

Au total: en moyenne sur un groupe de 80 voyageurs, le portique sonne 1,75 fois, donc un peu moins de deux fois.

2. c. c1. $P(X \geq 1)$?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \Rightarrow P(X \geq 1) \approx 83\%.$$

La probabilité qu'au moins une personne fasse sonner le portique est d'environ: 83%.

2. c. c2. $P(X \leq 5)$?

$$P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ + P(X = 4) + P(X = 5) \Rightarrow P(X \leq 5) \approx 99,2\%.$$

La probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique est d'environ: 99,2%.

2. d. La valeur du plus petit entier naturel n tel que $P(X \leq n) \geq 90\%$?

Il s'agit de: $n = 3$.