

## EXERCICE 2

### [ France Métropolitaine 2016 ]

1. Expliquons pourquoi pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = 0,75 U_n + 3000$ :

- D'après l'énoncé, au 1<sup>er</sup> mars 2015, le loueur de voitures dispose de 10000 voitures pour l'Europe.

D'où:  $U_0 = 10000$ .

- De plus, chaque année leur nombre baisse de 25% et augmente de 3000 nouvelles voitures neuves.

Soient:

- $U_{n+1}$ , le nombre de voitures au 1<sup>er</sup> mars (2015 + (n + 1)),
- $U_n$ , le nombre de voitures au 1<sup>er</sup> mars (2015 + (n)).

Pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $U_{n+1}$  de voitures est égal au nombre  $U_n$  de voitures diminué de 25% et augmenté de 3000 " nouvelles voitures neuves. "

Donc pour tout entier naturel  $n$ :

$$U_{n+1} = U_n - 25\% U_n + 3000 \iff U_{n+1} = 0,75 U_n + 3000.$$

2. a. Montrons que la suite  $(V_n)$  est géométrique et déterminons  $V_0$  et  $q$ :

$$V_n = U_n - 12000 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 12000$$

$$\iff V_{n+1} = (0,75 U_n + 3000) - 12000 \quad (1).$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 12\,000 \Rightarrow V_0 = -2\,000 \text{ et } U_n = V_n + 12\,000.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,75[V_n + 12\,000] + 3\,000) - 12\,000 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 0,75 V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(V_n)$  est bien une suite géométrique de raison  $q = 0,75$  et de premier terme  $V_0 = -2\,000$ .

### 2. b. b1. Exprimons $V_n$ en fonction de $n$ :

Comme  $V_{n+1} = 0,75 V_n$ , d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,75)^n, \text{ avec: } V_0 = -2\,000.$$

En d'autres termes:  $V_n = -2\,000 \times (0,75)^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2. b. b2. Déterminons la limite de la suite $(V_n)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -2\,000 \times (0,75)^n \\ &= 0 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0, \text{ car: } 0,75 \in ]0, 1[. \end{aligned}$$

Donc la suite  $(V_n)$  est convergente et converge vers "0".

### 2. c. Justifions que, pour tout entier naturel $n$ , $U_n = 12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n$ :

$$\text{Nous savons que: } * V_n = -2\,000 \times (0,75)^n$$

$$* U_n = V_n + 12\,000.$$

$$\text{D'où: } U_n = 12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n.$$

### 2. d. Que pouvons-nous conjecturer au bout d'un grand nombre d'années cad quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

$$\text{Nous savons que: } \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ et } \bullet U_n = 12\,000 - V_n.$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 12\,000 - V_n$$

$$= 12\,000 - 0$$

$$= 12\,000 \text{ voitures présentes dans le parc.}$$

Donc la suite  $(U_n)$  est convergente et converge vers " 12 000 " voitures.

Cela signifie qu'au bout de  $n$  années ("  $n$  " très grand), le nombre de voitures présentes dans le parc tendra vers 12 000.

3. a. Complétons l'algorithme afin qu'il permette de répondre au problème:

L'algorithme complété est le suivant:

**Initialisation:**

...

...

**Traitement:**

Tant que  $U < 11\,950$  faire

$N$  prend la valeur  $N + 1$

$U$  prend la valeur  $0,75 U + 3\,000$

Fin du Tant que

**Sortie:**

Afficher  $N$

3. b. Déterminons l'année recherchée:

A l'aide d'une machine à calculer, nous obtenons:

$$2015 + 13, \text{ cad: } 2028.$$

En effet:  $U_{13} \approx 11952 > 11950$ .

En définitive, en 2028, le parc automobile comptera au moins 11950 voitures.

3. c. Résolvons l'inéquation  $12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n \geq 11\,950$ :

$$12\,000 - 2\,000 \times (0,75)^n \geq 11\,950$$

$$\Leftrightarrow -2\,000 \times (0,75)^n \geq -50$$

$$\Leftrightarrow 2\,000 \times (0,75)^n \leq 50$$

$$\Leftrightarrow (0,75)^n \leq \frac{5}{200}$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,75) \leq \ln\left(\frac{1}{40}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{40}\right)}{\ln(0,75)}, \quad \text{car: } 0,75 \in ]0, 1[, \quad \text{et donc: } \ln(0,75) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 13, \quad \text{car } n \text{ est un entier naturel.}$$

Au total, nous retrouvons la même réponse qu'à la question précédente, à savoir: l'année 2028 (2015 + 13 ans).