Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement.
Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.

Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
Pour tout nombre entier naturel n, on note :

a_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version papier l'année $2010+n$;

b_n la probabilité qu'un abonné pris au hasard ait choisi la version numérique l'année $2010+n$;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « abonné à la version papier » et B l'état « abonné à la version numérique ».

   b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre A, B des sommets.

   c. Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$ et $b_{n+1} = 0,1a_n + 0,94b_n$.
   Le directeur du groupe de presse souhaite visualiser l'évolution des deux types d'abonnements. Pour cela, on lui propose les deux algorithmes suivants :

   Algorithme 1
```
Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
    b prend la valeur 0,1 × a + 0,94 × b
    Afficher a et b
Fin Pour
```

   Algorithme 2
```
Entrée
Saisir n
Traitement
a prend la valeur 1
b prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n
    c prend la valeur a
    a prend la valeur 0,9 × a + 0,06 × b
    b prend la valeur 0,1 × c + 0,94 × b
    Afficher a et b
Fin Pour
```

   Sachant qu'un seul des algorithmes proposés permet de répondre au souhait du directeur, préciser lequel en justifiant la réponse.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.

   b. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 0,375$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et calculer u_0.

   c. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$.

4. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50 %.

EXERCICE 2

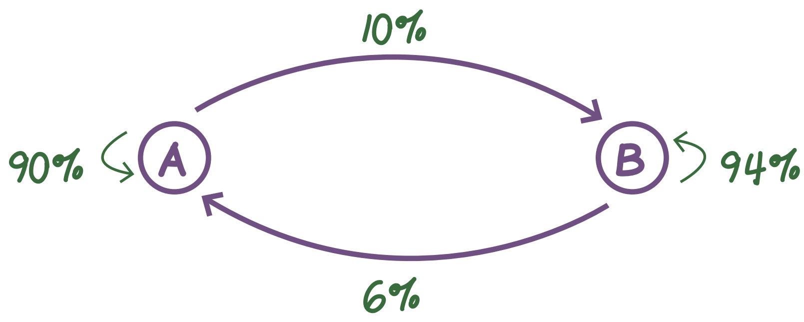
[Amérique du Nord 2016]

1. a. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B:

Soient: • A, l'état: " abonné à la version papier ",

• B, l'état: " abonné à la version numérique ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



1. b. Déterminons la matrice de transition M de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

1. c. Montrons que $P_1 = (0,9 \quad 0,1)$:

Soient: M la matrice de transition du graphe probabiliste à 2 sommets (A et B), P_0 la matrice ligne décrivant l'état initial et P_1 l'état probabiliste à l'état $n = 1$.

Nous avons: $P_1 = P_0 \times M'$, avec $P_0 = (a_0 \quad b_0) = (1 \quad 0)$.

Dans ces conditions: $P_1 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$

cad: $P_1 = (0,9 \quad 0,1)$.

Au total, nous avons bien: $P_1 = (0,9 \quad 0,1)$.

2. Déterminons l'algorithme qui répond aux souhaits du directeur:

L'algorithme qui répond aux souhaits du directeur est: l'algorithme n° 2.

3. a. Montrons que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,84\, a_n + 0,06$:

D'après le cours, nous savons que pour tout n de IN: $P_{n+1} = P_n \times M$.

D'où: $(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$

$\iff (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,9a_n + 0,06b_n \quad 0,1a_n + 0,94b_n)$

$\implies a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$. (a)

Or, d'après le cours: $a_n + b_n = 1$, pour tout entier naturel n.

Dans ces conditions: (a) $\iff a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06\,(1 - a_n)$, car $b_n = 1 - a_n$

$\implies a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons: $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.

3. b. Montrons que la suite (U_n) est géométrique et déterminons U_0 et q:

$U_n = a_n - 0,375 \iff U_{n+1} = a_{n+1} - 0,375$

$\Longleftrightarrow \; U_{n+1} = (0,84a_n + 0,06) - 0,375 \quad (1).$

Or: $U_0 = a_0 - 0,375 \Rightarrow U_0 = 0,625$ et $a_n = U_n + 0,375.$

Ainsi: $(1) \Longleftrightarrow U_{n+1} = (0,84\,[U_n + 0,375] + 0,06) - 0,375$

$\Rightarrow U_{n+1} = 0,84\,U_n.$

Par conséquent, (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,84$ et de premier terme $U_0 = 0,625.$

3. c. c1. Exprimons U_n en fonction de n:

Comme $U_{n+1} = 0,84\,U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$U_n = U_0 \times (0,84)^n$, avec: $U_0 = 0,625.$

En d'autres termes: $U_n = 0,625 \times (0,84)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. c. c2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$:

Nous savons que: * $U_n = 0,625 \times (0,84)^n$

* $a_n = U_n + 0,375.$

D'où: $a_n = 0,625 \times (0,84)^n + 0,375$ ou $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n.$

4. Déterminons l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50%:

Il s'agit de résoudre l'inéquation: $a_n < 0,5.$

$a_n < 0,5 \Longleftrightarrow 0,625 \times (0,84)^n + 0,375 < 0,5$

$\Longleftrightarrow (0,84)^n < 0,2$

$\Longleftrightarrow n \ln(0,84) < \ln(0,2)$

$\Longleftrightarrow \quad n > \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,84)}$, car: $\quad 0,84 \in]0, 1[$, et donc: $\quad \ln(0,84) < 0$

$\Longrightarrow \quad n > 9,23$

$\Longrightarrow \quad n \geq 10$, car n est un entier naturel.

Au total, c'est à partir de " 2010 + 10 ", cad 2020, que la proportion d'abonnés à la version papier du magazine deviendra inférieure à 50%.