ADMISSION AU COLLEGE UNIVERSITAIRE
Samedi 18 février 2017
MATHEMATIQUES
durée de l'épreuve : 3h – coefficient 2

Le sujet est paginé de 1 à 5. Veuillez vérifier que vous avez bien toutes les pages. En cas d'anomalie, avertissez le surveillant.

Le problème est noté sur 11, l'exercice Vrai-Faux est noté sur 9. Vous devez traiter les deux exercices.

Les calculatrices sont autorisées.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur typographique, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Problème

Les parties A, B et C de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.

En économie, l'élasticité de la demande d'un produit mesure la sensibilité de cette demande par rapport aux variations de prix du produit. L'objet de ce problème est d'étudier l'élasticité d'un produit, afin de déterminer le prix le mieux adapté à la demande.

Étant donné un produit dont le prix est noté x et dont la demande $f(x)$ varie en fonction du prix selon une fonction f strictement positive et dérivable de dérivée f', on appelle élasticité de la demande par rapport au prix la quantité :

$$E(x) = x \times \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

<u>Partie A : recette et élasticité</u>

Le tarif mensuel d'accès à une salle de sports est de 30 €. Pour ce prix, il y a 1800 adhérents.

On étudie un modèle selon lequel pour un tarif mensuel p (nombre entier compris entre 30 et 119), le nombre d'adhérents $f(p)$ est égal à $2400 - 20p$. Ainsi on a bien $f(30) = 1800$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel p compris entre 30 et 119, $E(p) = \dfrac{p}{p-120}$.

2. On dit que la demande est élastique, c'est-à-dire qu'elle est sensible aux variations de prix, si $E(p) < -1$. Quels sont les prix p pour lesquels la demande est élastique ?

3. On note $R(p)$ la recette mensuelle obtenue pour le prix p, de sorte que $R(p) = p \times f(p)$. On admet dans cette question que la recette mensuelle $R(p)$ est maximale lorsque l'élasticité $E(p)$ vaut -1. Calculer cette recette mensuelle maximale.

4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de la suite $(R(p))$, définie pour tout entier naturel p compris entre 30 et 119.

<u>Partie B : étude d'un cas particulier</u>

La demande hebdomadaire d'un produit informatique est modélisée par la fonction f définie par : $f(x) = (2x + 10)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$ pour $x \in [1\ ;\ +\infty[$.
Le nombre $f(x)$ est la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x, en centaines d'euros.

1. ***<u>Étude de la fonction demande</u>***

a. Etudier les variations de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En quoi ce résultat est-il cohérent ?

c. La recette R est définie sur [1 ; +∞[par $R(x) = x \times f(x)$. Déterminer le prix de ce produit informatique à l'euro près pour que la recette soit maximale.

2. ***Étude de l'élasticité de la demande par rapport au prix***

a. Vérifier que pour tout $x \geq 1$, $E(x) = \dfrac{-x^2-3x}{2x+10}$, puis donner le signe de cette expression.

b. On admet que l'élasticité est une approximation du taux de variation de la demande pour une variation de 1% d'un prix x donné. Calculer une valeur approchée du taux de variation de la demande lorsque le prix passe de 1000 € à 1010 €.

c. Résoudre l'équation $E(x) = -3{,}15$. Interpréter ce résultat.

d. On dit que la demande est peu élastique si l'élasticité de la demande par rapport au prix est comprise entre – 1 et 0 (dans ce cas, la demande est peu sensible aux variations de prix).
Pour quels prix la demande de ce produit informatique est-elle peu élastique ?

Partie C : étude théorique

Dans cette partie, si f désigne une fonction ne s'annulant pas sur]0 ; +∞[, de dérivée f' sur cet intervalle, on note $E_f(x)$ l'élasticité de la fonction f par rapport à la variable x, de sorte que :
$E_f(x) = x \times \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ pour $x \in]0\,;+\infty[$.

1. ***Quelques fonctions particulières***

a. Montrer que l'élasticité d'une fonction puissance $x \mapsto x^n$ avec n entier supérieur ou égal à 1 est constante sur $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer l'élasticité de la fonction exponentielle sur]0 ; +∞[.

2. ***Règles opératoires***

Soient un réel λ et deux fonctions f et g ne s'annulant pas sur]0 ; +∞[, dérivables sur cet intervalle. Montrer que pour tout $x > 0$:

a. $E_{\lambda \times f}(x) = E_f(x)$.

b. $E_{f \times g}(x) = E_f(x) + E_g(x)$.

c. $E_{\frac{f}{g}}(x) = E_f(x) - E_g(x)$.

3. En utilisant ces règles opératoires, déterminer l'élasticité de la fonction h définie sur]0 ; +∞[par $h(x) = \dfrac{2017\mathrm{e}^x}{x^2}$.

Exercice : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. On considère deux fonctions f et g ayant les propriétés suivantes :

$$f(x) \leq g(x) \text{ pour tout réel } x \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

<u>Affirmation</u> : Pour tout réel x, on a : $2 \leq g(x)$.

2. Pour se rendre à son examen, une personne a le choix entre 4 itinéraires : A, B, C et D.
La probabilité de choisir A est $\frac{1}{3}$, de choisir B est $\frac{1}{4}$ et de choisir C est $\frac{1}{12}$.
La probabilité d'arriver en retard avec A est $\frac{1}{20}$, avec B $\frac{1}{10}$ et avec C $\frac{1}{5}$.
En empruntant D, elle est certaine d'arriver à l'heure.

<u>Affirmation</u> : La probabilité qu'elle arrive à l'heure est inférieure à $\frac{11}{12}$.

3. On considère l'algorithme suivant.

Entrée : Saisir un entier naturel n supérieur ou égal à 1
Traitement : Affecter à A la valeur 0. Pour k allant de 1 à n Affecter à A la valeur $A + \frac{1}{k}$ Fin Pour Affecter à A la valeur nA
Sortie : Afficher A

<u>Affirmation</u> : pour $n = 6$, le résultat affiché est 14,7.

4. Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points :
$A(-1\,;2)$, $B(6\,;-5)$, $C(-2\,;-1)$ et $D(0\,;1)$.

<u>Affirmation</u> : D est le point d'intersection de la droite (AB) et de la perpendiculaire à cette droite passant par C.

5. On donne : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Affirmation : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

6. La suite (u_n) est définie par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Affirmation : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$.

7. On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 1.
Un archer effectue n tirs consécutifs sur une cible. La réussite ou l'échec à un tir n'influence pas les tirs suivants. Ainsi, à chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est de $\frac{2}{5}$.

Affirmation : Pour $n \geq 10$, la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible lors des n lancers est supérieure ou égale à 0,999.

8. Pour tout réel $m > 0$, on considère l'équation (E_m) : $2mx^2 + (4m + 1)x + 2 = 0$.

Affirmation : L'équation (E_m) admet toujours deux solutions.

9. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Affirmation : La courbe représentative de f admet au moins une tangente qui passe par l'origine.

10. Une urne U contient 3 boules numérotées de 1 à 3.
On effectue une succession de tirages d'une boule en appliquant la règle suivante : si la boule tirée porte le numéro k, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k avant de procéder au tirage suivant.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U de toutes ses boules.

Affirmation : l'espérance $E(X)$ est strictement supérieure à 2.

*******FIN*******