# ÉPREUVE MATHÉMATIQUES
# SciencesPo - Paris, 2019

# CORRIGÉ - freemaths.fr

## Pour s'entraîner :

▸ **Problème :**
- Analyse I, 2e édition - Alain Piller
- Fonctions, Intégrales, T. S et T. ES - freemaths.fr
- Suites, T. S - freemaths.fr

▸ **Exercice :**

▸ Thème sur freemaths.fr (**selon la question**)

- Suites, T. S [ Q. 1, Q. 2, Q. 3 et Q. 6 ]
- Fonctions, Intégrales, T. S [ Q. 4, Q. 5 et Q. 7 ]
- Fonctions, Intégrales, T. ES [ Q. 4, Q. 5 et Q. 7 ]
- Probabilités Discrètes, T. S [ Q. 8 et Q. 9 ]
- Probabilités Discrètes, T. ES [ Q. 8 et Q. 9 ]
- Géométrie dans l'Espace, T. S [ Q. 10 ]

# EXERCICE: Vrai ou Faux ? ( 11 points )

1. C'est faux.

Soient: • $P_i$, le prix du gaz en avril 2018 (prix initial),

• $P_f$, le prix du gaz en juillet 2018 (prix final),

• $r_1 = 0,4\%$, le taux de croissance en mai 2018,

• $r_2 = 2,1\%$, le taux de croissance en juin 2018,

• $r_3 = 7,45\%$, le taux de croissance en juillet 2018.

Nous avons: $P_f = (1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)\,P_i$

$= (1,004)(1,021)(1,0745)\,P_i$

$\approx 1,1014 \times P_i$.

Ainsi: l'augmentation cumulée sur ces trois mois sera d'environ 10, 14%.

Comme: $10,14\% \neq 9,95\%$, l'augmentation cumulée sur ces trois mois ne sera pas de 9, 95%.

Donc l'affirmation est fausse.

2. C'est faux.

Pour le justifier, nous allons prendre un contre exemple.

Prenons la suite $(U_n)$ définie sur IN par:

$$\begin{cases} U_n = -(3)^n & \text{si } n \in [0;7] \\ U_n = (3)^n & \text{si } n \geq 8 \end{cases}.$$

Nous avons: $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} (3)^n$

$= +\infty.$

Or: • $U_0 = 0$

• $U_3 = -27.$

Et donc: $U_3 < U_0.$

**Ainsi**: **la suite $(U_n)$ tend vers $+\infty$ et n'est pas croissante**.

**Donc l'affirmation est fausse**.



3. **C'est vrai**.

Pour le justifier, nous allons avoir recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = 3^n + n - 1$,
sachant que $U_{n+1} = 3\,U_n - 2n + 3$ ".

**Initialisation**: • $U_0 = 0$, d'après l'énoncé.

Et: $U_0 = 3^0 + 0 - 1 = 0$, car $U_n = 3^n + n - 1$.

Donc **vrai au rang " 0 "**.

**Hérédité**: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n = 3^n + n - 1$
et montrons qu'alors: $U_{n+1} = 3^{(n+1)} + (n+1) - 1.$

**Supposons**: $U_n = 3^n + n - 1$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$(1) \Rightarrow 3U_n = 3(3^n + n - 1)$

$\Rightarrow 3U_n - 2n + 3 = 3(3^n + n - 1) - 2n + 3$

$\Rightarrow 3U_n - 2n + 3 = 3^{(n+1)} + 3n - 3 - 2n + 3$

$\Rightarrow 3U_n - 2n + 3 = 3^{(n+1)} + n + 0$

$\Rightarrow 3U_n - 2n + 3 = 3^{(n+1)} + n + (1 - 1)$

$\Rightarrow 3U_n - 2n + 3 = 3^{(n+1)} + (n + 1) - 1$

$\Rightarrow U_{n+1} = 3^{(n+1)} + (n + 1) - 1.$

**Conclusion**: Pour tout entier naturel n, nous avons bien: $U_n = 3^n + n - 1$.

**Donc l'affirmation est vraie.**

4. **C'est faux.**

En effet, résolvons dans IR l'équation: $\ln(4x + 5) + \ln(x + 1) = 1.$ (1)

**Préalablement, notons que l'ensemble de définition est:** $]-1\,;+\infty[$.

$(1) \iff \ln(4x + 5) + \ln(x + 1) = 1 \iff \ln((4x + 5)(x + 1)) = \ln e$

$\iff (4x + 5)(x + 1) = e$

$\iff 4x^2 + 9x + (5 - e) = 0.$

$\Delta = 81 - 4 \times 4 \times (5 - e) \iff \Delta = 1 + 16e > 0.$

D'où l'équation (1) **admet 2 solutions distinctes** qui sont:

- $x' = \dfrac{-9 - \sqrt{1 + 16e}}{8}$,
- $x'' = \dfrac{-9 + \sqrt{1 + 16e}}{8}$.

Or: $x' \notin ]-1\,;+\infty[$ car: $x' < -1$.

Et: $x'' \in ]-1\,;+\infty[$.

Ainsi: l'équation (1) ne possède pas exactement deux solutions dans $]-1\,;+\infty[$. Elle admet qu'une seule solution.

Donc l'affirmation est fausse.

5. C'est vrai.

En effet ici: • $f(x) = x\,e^{x^2}$,

• $Df = \mathbb{R}$,

• $A\,(-1\,; f(-1))$ et $B\,(1\,; f(1))$.

Soient $d_1$, la tangente à la courbe représentative de $f$ au point A et $d_2$, la tangente à la courbe représentative de $f$ au point B.

L'équation de la droite $d_1$ est: $y = a \cdot x + b$.

L'équation de la droite $d_2$ est: $y = a' \cdot x + b'$.

Dans ces conditions, $d_1$ et $d_2$ sont parallèles ssi leurs coefficients directeurs sont égaux cad ssi: $a = a'$.

Or: • $a = f'(-1)$

• $a' = f'(1)$.

Nous devons ainsi calculer $f'$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = e^{x^2}$.

$f_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$f_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction " exponentielle " est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc, $f$ est dérivable sur $IR$ comme produit ( $f_1 \times f_2$ ) de 2 fonctions dérivables sur $IR$.

Ainsi, nous pouvons calculer $f'$ pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (1 \times e^{x^2}) + (x \times 2x \times e^{x^2})$ $(u' \times v + u \times v')$

$$= (1 + 2x^2)\, e^{x^2}.$$

D'où:
- $f'(-1) = 3e$ et donc $a = 3e$,
- $f'(1) = 3e$ et donc $a' = 3e$.

Ainsi: $a = a' = 3e$, et donc $d_1$ et $d_2$ sont bien parallèles.

Donc l'affirmation est vraie.

6. C'est vrai.

Le cycliste part de chez lui à 8 heures et son parcours comprend 3 étapes.

**Etape 1**: une descente de 16 km à 80 km/h.

Le temps mis pour cette étape 1 est de: $\dfrac{16}{80} = 0,2$ heure, soit **12 minutes**.

**Etape 2**: 40 km de plat à 50 km/h.

Le temps mis pour cette étape 2 est de: $\dfrac{40}{50} = 0,8$ heure, soit **48 minutes**.

**Etape 3**: une montée de 5 km à $x$ km/h.

Le temps mis pour cette étape est de: $\dfrac{5}{x}$ heure, soit $\dfrac{5 \times 60}{x}$ minutes.

Dans ces conditions, le cycliste sera à l'heure ssi:

(1) $12 + 48 + \dfrac{300}{x} \leqslant (9\text{ h }30 - 8\text{ h}) \times 60$ (en minutes)

ou:

(2) $0,2 + 0,8 + \dfrac{5}{x} \leqslant (9\text{ h }30 - 8\text{ h})$ (en heures).

Prenons l'inégalité (1):

$(1) \iff 60 + \dfrac{300}{x} \leqslant 1,5 \times 60$ $\quad (1,5 = 1\text{ h }30)$

$\iff \dfrac{300}{x} \leqslant 30$

$\iff x \geqslant 10.$

**Ainsi:** le cycliste sera à l'heure ssi $x \geqslant 10$.

**Donc l'affirmation est vraie.**

7. **C'est faux.**

D'après l'énoncé:
- $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- $f'(x) = 1 + f^2(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $f(1) = 0$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^2(x) \geqslant 0$, et donc $1 + f^2(x) > 0$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) > 0$, cad $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, sur $[-1 ; 0]$: $f(x) < f(1) = 0$, cad $f(x) < 0$.

**Ainsi:** $f$ est strictement négative sur $[-1 ; 0]$.

**Donc l'affirmation est fausse.**

8. **C'est vrai.**

Soit G, la variable aléatoire égale au Gain réalisé, après avoir misé 1€ et tiré une boule au hasard.

Les boules sont numérotées 10, 5 et 0.

Le gain correspond au numéro inscrit sur la boule.

**Distinguons 3 cas:**

- le joueur tire une boule **10**: gain réalisé = 10 - 1 = **9€**.
- le joueur tire une boule **5**: gain réalisé = 5 - 1 = **4€**.
- le joueur tire une boule **0**: gain réalisé = 0 - 1 = **-1€** **(perte)**.

Dans ces conditions, la loi de probabilité de la variable aléatoire G est:

| $G = g_i$ | 9€ | 4€ | -1€ |
|---|---|---|---|
| $P(G = g_i)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{3}{n}$ | $\frac{(n-4)}{n}$ |

- **1 boule 10 sur n boules**
- **3 boules 5 sur n boules**
- **(n - 1 - 3) boules 0 sur n boules**

Pour répondre à la question, nous devons calculer **E(G)**.

$$E(G) = \left(9 \times \frac{1}{n}\right) + \left(4 \times \frac{3}{n}\right) + \left(-1 \times \frac{(n-4)}{n}\right)$$

$$= \frac{25 - n}{n}.$$

Le jeu est donc équitable ssi: E(G) = 0, cad **n = 25**.

**Ainsi: le jeu est bien équitable ssi n = 25.**

**Donc l'affirmation est vraie.**

9. C'est faux.

Soient les événements F = " côté Face ", et P = " côté Pile ".

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le côté Face apparaît sur 15 lancers successifs de la pièce.

Nous sommes en présence de 15 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de F suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 15$ et $p = \frac{2}{3}$.

$$\left( \frac{2}{3} = P(F) = 2 \times P(P) \text{ et } P(F) + P(P) = 1 \right)$$

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\left(15\,;\frac{2}{3}\right)$.

En fait, on répète 15 fois un schéma de Bernoulli.

Ici, il s'agit de calculer: $P(X = 10)$.

( la probabilité de tomber exactement 10 fois sur FACE )

$$P(X = 10) = \binom{15}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5}$$

$$= 0,2143.$$

Ainsi: la probabilité de tomber exactement 10 fois sur FACE est égale à $0,2143 < 0,2$.

Donc l'affirmation est fausse.

10. C'est vrai.

Pour montrer que les points M, N et P sont alignés, nous allons procéder en deux étapes.

**Etape 1**: Détermination des coordonnées des points M, N et P.

• **Détermination des coordonnées du point M**:

$\overrightarrow{DM} = -2\,\overrightarrow{BD} \iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}.$

**Ainsi**: $M(7\,;0)$.

• **Détermination des coordonnées du point N**:

$\overrightarrow{CN} = 5\,\overrightarrow{CA} \iff \begin{pmatrix} x-4 \\ y-2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -3 \end{cases}.$

**Ainsi**: $N(-11\,;-3)$.

• **Détermination des coordonnées du point P**:

$\overrightarrow{BP} = 3\,\overrightarrow{AB} \iff \begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \end{cases}.$

**Ainsi**: $P(13\,;1)$.

**Etape 2**: Détermination du réel $\alpha$ tel que $\overrightarrow{MN} = \alpha \cdot \overrightarrow{MP}$.

En effet, les points M, N et P sont alignés ssi il existe un réel $\alpha$ tel que:

$$\overrightarrow{MN} = \alpha \cdot \overrightarrow{MP}. \quad (\overrightarrow{MN} \text{ et } \overrightarrow{MP} \text{ sont colinéaires})$$

$$\overrightarrow{MN} = \alpha \cdot \overrightarrow{MP} \iff \begin{pmatrix} -11-7 \\ -3-0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 13-7 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -18 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 6\alpha = -18 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = -3.$$

**Ainsi**: $\overrightarrow{MN} = -3 \times \overrightarrow{MP}$, et donc les points M, N et P sont bien alignés, car les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires.

**Donc l'affirmation est vraie.**

# PROBLÈME ( 9 points )

[ Analyse I, 2e édition - Alain Piller
freemaths.fr: • Fonctions, Intégrales, T. S et T. ES
• Suites T. S ]

## Partie A:

1. Déterminons les limites de $f$ en 0 et $+\infty$:

Ici: • $f(x) = x \ln(x) + 1$

• $Df = ]0; +\infty[$.

• limite de $f$ en " 0 ":

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) + 1$$

$= 1$, car d'après le cours: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

• limite de $f$ en " $+\infty$ ":

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \ln(x) + 1$$

$= +\infty$, car d'après le cours: $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(x) = +\infty$.

**Au total**: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**2. Montrons que pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 + \ln(x)$:**

D'après l'énoncé, $f$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer $f'$ sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in ]0; +\infty[$: $f'(x) = [\, 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \,]$

$(u' \times v + u \times v')$

$= 1 + \ln(x)$.

**Au total, nous avons bien**: $f'(x) = 1 + \ln(x), \forall\, x \in ]0 ; +\infty[$.

**3. a. Etudions les variations de $f$ sur $]0 ; +\infty[$:**

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in ]0; +\infty[$.

- **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$.

- **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0 \iff 1 + \ln(x) < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{e}$ ou $x \in ]0; \frac{1}{e}[$.

- **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0 \iff 1 + \ln(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{e}$ ou $x \in ]\frac{1}{e}; +\infty[$.

Ainsi: • $f$ est décroissante sur $]0; \frac{1}{e}]$. (**strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{e}[$**)

• $f$ est croissante sur $\left[\frac{1}{e} ; +\infty\right[$. (strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$ )

**Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:**

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $1$ | $\searrow$ | $1 - \frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3. b. Montrons que $f$ admet un minimum dont on donnera la valeur exacte:**

La fonction $f$ admet un minimum quand $f'(x) = 0$, sachant que pour tout $x$ appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f(x) \geqslant f(x_{Min})$.

Or $f'(x) = 0$ quand: $x_{Min} = \frac{1}{e}$.

Dans ces conditions: $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1$

cad: $f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}$.

**Au total, la fonction $f$ admet comme minimum global:** le point $A\left(\frac{1}{e} ; 1 - \frac{1}{e}\right)$.

**4. Déterminons une équation de la tangente $\Delta$ à la courbe $Cf$ au point d'abscisse $x = 1$:**

D'après le cours, l'équation réduite de la tangente $\Delta$ à la courbe $Cf$ au point

$x = 1$ s'écrit: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. (1)

Or: $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$. $(B(1; 1))$

D'où: $(1)$ <=> $y - 1 = 1 \times (x - 1)$ => $y = x$.

**Au total, l'équation de la tangente $\Delta$ est: $y = x$.**

**5. a. Etudions les variations de g sur ] 0 ; +∞ [:**

Ici: • $g(x) = f(x) - x = x \ln(x) + 1 - x$

• $Dg = ]0 ; +\infty[$.

Posons: $g = f + h$, avec: $h(x) = -x$.

$f$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, d'après l'énoncé.

h est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Donc, g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme $(f + h)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer $g'$ pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$: 
$$g'(x) = f'(x) + h'(x)$$
$$= 1 + \ln(x) - 1$$
$$= \ln(x).$$

Au total, pour tout $x \in ]0 ; +\infty[$: $g'(x) = \ln(x)$.

Afin d'établir les variations de g sur $]0 ; +\infty[$, nous allons distinguer 3 cas:

• **1er cas**: $g'(x) = 0$.

$g'(x) = 0$ <=> $\ln(x) = 0$ <=> $x = 1$.

• **2ème cas**: $g'(x) < 0$.

$g'(x) < 0 \iff \ln(x) < 0 \iff x < 1$ ou $x \in \, ]0 ; 1[$.

• **3ème cas**: $g'(x) > 0$.

$g'(x) > 0 \iff \ln(x) > 0 \iff x > 1$ ou $x \in \, ]1 ; +\infty[$.

Ainsi: • $g$ est décroissante sur $]0 ; 1]$. **(strictement décroissante sur $]0 ; 1[$)**

• $g$ est croissante sur $[1 ; +\infty[$. **(strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$)**

**Nous pouvons alors dresser le tableau de variation suivant**:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | ‖ $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**5. b. Déduisons-en le signe de g sur $I$**:

Grâce au tableau de variation précédent, nous constatons que: $g(1) = 0$.

Nous allons distinguer 2 cas:

• si $x \in \, ]0 ; 1[$, alors $g(x) > g(1) = 0$,

• si $x \in \, ]1 ; +\infty[$, alors $g(x) > g(1) = 0$.

**Ainsi**: • la fonction $g$ est strictement positive sur $]0 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$,

• la fonction $g$ est positive sur $]0 ; +\infty[$.

5. c. **Déduisons-en les positions relatives de $Cf$ et $\Delta$ sur $]0;+\infty[$:**

Rappelons que: • l'équation de $\Delta$ est $y = x$.

• le point de contact entre $Cf$ et $\Delta$ est le point $B(1;1)$.

De plus, pour tout $x \in ]0;+\infty[$: $g(x) \geqslant 0$

$\iff f(x) - x \geqslant 0$

$\iff f(x) \geqslant x$.

**Ainsi: $Cf$ est située au dessus de la droite $\Delta$ avec un seul point de contact, le point B.**

## Partie B:

1. **Montrons que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]0;+\infty[$:**

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a;b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a;b]$.

• Si de plus, la fonction $f$ est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a;b]$.

Ici: • $f$ est continue sur $]0; +\infty[$ et donc sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$. $(2 > f(\frac{1}{e}))$

• " k = 2 " est compris entre: $f(\frac{1}{e}) = 1 - \frac{1}{e}$

et: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• $f$ est strictement croissante sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$ car pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{e}; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 2$ (k = 2) admet une unique solution $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, et plus exactement sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$.

**Ainsi: l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0; +\infty[$.**

**2. Démontrons que $\alpha \leqslant 2$:**

Nous savons que pour tout $x \in ]0; +\infty[$: $f(x) \geqslant x$.

**Donc pour tout $x \in ]\frac{1}{e}; +\infty[$: $f(x) \geqslant x$.**

Comme $\alpha \in ]\frac{1}{e}; +\infty[$, nous pouvons écrire:

$$f(\alpha) \geqslant \alpha \iff 2 \geqslant \alpha \text{ ou } \alpha \leqslant 2.$$

**Ainsi: $\alpha \leqslant 2$, et donc $\alpha \in ]\frac{1}{e}; 2[$.**

**3. a. Montrons que $\alpha \geqslant \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$:**

D'après l'énoncé, nous savons que: $\alpha^2 - \alpha \geqslant 1$. (1)

De plus, nous savons que: $\alpha \in ]\frac{1}{e}; 2[$, d'après la question précédente.

Soit l'équation: $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1)$ c.a.d.: $\Delta = 5 > 0$.

Dans ces conditions, l'équation admet deux solutions distinctes qui sont:

$$x' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } x'' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$

Seule la solution $x''$ sera retenue car: $x'' \in \left]\frac{1}{e}; 2\right[$ et $x' \notin \left]\frac{1}{e}; 2\right[$.

**Ainsi**: l'inéquation **(1)** admet comme solution $\alpha \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



**3. b. Déduisons-en un encadrement de $\alpha$ à 0, 2 près:**

D'après la question précédente, nous avons donc: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq \alpha \leq 2$.

Notons que: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq \alpha \leq 2 \iff 1,618 \leq \alpha \leq 2$.

Or:
- $f(1,6) \approx 1,752$,
- $f(1,8) \approx 2,058$,
- $f(\alpha) = 2$.

**D'où**: $f(1,6) \leq f(\alpha) \leq f(1,8) \iff 1,6 \leq \alpha \leq 1,8$.

(car $f$ est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$)

**Ainsi**: nous pouvons prendre comme encadrement de $\alpha$ à $10^{-2}$ près $[1,6; 1,8]$.

4. Proposons un algorithme qui permet d'obtenir un encadrement de $\alpha$ à 0,001 près:

Un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de $\alpha$ à 0,001 près est:

```
a   prend la valeur   1.6
b   prend la valeur   1.8

while   b - a ≥ 0,001
        if   f((a + b)/2) < 2
            then   a prend la valeur (a + b)/2
            else   b prend la valeur (a + b)/2
        end if
end while

Afficher a
Afficher b
```

## Partie C:

1. Démontrons que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique $\alpha_n$ dans l'intervalle $]0; +\infty[$:

Ici: $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui revient à dire que $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Or nous savons que: • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$,

• $f(\frac{1}{e}) = 1 - \frac{1}{e} < 1$,

• $f$ est strictement décroissante sur $]0 ; \frac{1}{e}[$.

Nous pouvons donc affirmer que pour tout $x$ appartenant à $]0 ; \frac{1}{e}]$, $f(x) < 1$.

Donc nous pouvons rejeter le cas où $x \in ]0 ; \frac{1}{e}]$.

Concentrons-nous à présent sur le cas où $x \in ]\frac{1}{e} ; +\infty[$.

Nous allons montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n$ dans $]\frac{1}{e} ; +\infty[$.

Pour cela nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Ici: • $f$ est continue sur $]\frac{1}{e} ; +\infty[$.

• " $k = n$ " est compris entre: $\boldsymbol{f(\frac{1}{e}) = 1 - \frac{1}{e} < 1}$

et: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

**( donc la fonction $f$ prend la valeur n au moins une fois sur $]\frac{1}{e} ; +\infty[$ )**

• $f$ est strictement croissante sur $]\frac{1}{e} ; +\infty[$ car pour tout $x \in ]\frac{1}{e} ; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = n$ ($k = n$) admet une unique solution $\alpha_n$ appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{e}; +\infty[$, donc sur $I$: $]0; +\infty[$.

**2. Précisons la valeur de $\alpha_1$:**

Nous savons que pour tout $x \in ]0; +\infty[$: $f(x) = x \ln(x) + 1$.

Dans ces conditions: $f(\alpha_n) = n$, avec $n = 1$

$\iff f(\alpha_1) = 1$

$\iff \alpha_1 \ln(\alpha_1) + 1 = 1$

$\iff \ln(\alpha_1) = 0$, car $\alpha_1 > \frac{1}{e}$ et donc $\alpha_1 \neq 0$

$\iff \alpha_1 = 1$.

**Ainsi: la valeur de $\alpha_1$ est " $\alpha_1 = 1$ ".**

**3. Montrons que la suite $(\alpha_n)$ est croissante:**

D'après le cours, la suite $(\alpha_n)$ est strictement **croissante** si pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

Ici, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons:
- $f(\alpha_n) = n$,
- $f(\alpha_{n+1}) = n + 1$.

Comme $n + 1 > n$, nous avons donc: $f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n)$.

De plus:
- $\alpha_n \in ]\frac{1}{e}; +\infty[$,
- $\alpha_{n+1} \in ]\frac{1}{e}; +\infty[$,
- $f$ est strictement croissante sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$.

Donc: $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Ainsi**: la suite $(\alpha_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

**4. Montrons que la suite $(\alpha_n)$ n'est pas majorée:**

D'après le cours, la suite $(\alpha_n)$ est majorée ssi il existe un réel M tel que

pour tout entier naturel non nul n: $\alpha_n \leqslant M$. (M s'appelle " le majorant ")

Nous savons que la suite $(\alpha_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

De plus: $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n + 1$

$= +\infty$. ( " $+\infty$ " n'est pas un réel fini )

**Ainsi**: la suite $(\alpha_n)$ n'est pas majorée.

**5. Concluons quant à la convergence de la suite $(\alpha_n)$:**

D'après le cours, nous savons que **toute suite croissante et majorée est convergente**.

Ici: la suite $(\alpha_n)$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$ mais n'est pas majorée.

Donc, elle n'est **pas convergente**.

**Ainsi**: la suite $(\alpha_n)$ n'est pas convergente. (On dit qu'elle est divergente)

## Partie D:

**1. Montrons que si $U_0 = 1$, alors la suite $(U_n)$ est constante:**

D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $U_{n+1} = f(U_n)$,

• $U_0 \in ]0; +\infty[$.

D'après le cours, une suite $(U_n)$ est constante sur $\mathbb{N}$ ssi: $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n$.

Nous allons avoir recours à une démonstration par récurrence.

Montrons par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_{n+1} = U_n$, sachant que $U_{n+1} = f(U_n)$ ".

**Initialisation**: $U_0 = 1$, par hypothèse d'après l'énoncé.

Et: $U_1 = f(U_0) \iff U_1 = 1 \times \ln(1) + 1 \iff U_1 = 1$.

$(f(x) = x \ln(x) + 1)$

D'où: $U_1 = U_0 = 1$.

Donc **vrai au 1er rang**.

**Hérédité**: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_{n+1} = U_n$

et montrons qu'alors: $U_{n+2} = U_{n+1}$.

**Supposons**: $U_{n+1} = U_n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$(1) \Rightarrow f(U_{n+1}) = f(U_n)$

$\Rightarrow U_{n+2} = U_{n+1}$, car: $U_{n+2} = f(U_{n+1})$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

**Conclusion**: Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n = 1$ et donc la suite $(U_n)$ est constante.

Et donc: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = 1.$

**2. Montrons que la suite $(U_n)$ est croissante:**

D'après le cours, la suite $(U_n)$ est **croissante** si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} \geqslant U_n$.

Ici, il s'agit donc de démontrer que: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(U_n) \geqslant U_n$.

Or nous savons, grâce à la question Partie A 5. b. que: **$g$ est positive sur $]\,0\,; +\infty\,[$.**

Cela signifie que: $\forall\, x \in\, ]\,0\,; +\infty\,[,\ f(x) - x \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant x.$

Donc ici, **en supposant que $U_n \in\, ]\,0\,; +\infty\,[$**:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(U_n) \geqslant U_n \ \text{ cad } \ U_{n+1} \geqslant U_n.$$

**Ainsi**: **la suite $(U_n)$ est croissante sur $\mathbb{N}$.**

**3. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$:**

D'après l'énoncé:
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$,
- $U_0 \in\, ]\,0\,; 1\,[$.

Or nous savons, grâce à la Partie A que:
- $f(x) = x \ln(x) + 1$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f$ est décroissante sur $]\,0\,; \frac{1}{e}\,]$
- $f$ est croissante sur $[\,\frac{1}{e}\,; +\infty\,[$.

Ici, nous allons distinguer 2 cas:

- $U_n \in \left]0 ; \frac{1}{e}\right]$ et dans ce cas $f$ est décroissante.
- $U_n \in \left[\frac{1}{e} ; 1\right[$ et dans ce cas $f$ est croissante.

**1er cas**: $U_n \in \left]0 ; \frac{1}{e}\right]$ **et donc $f$ est décroissante.**

Nous allons montrer par récurrence que: " $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < 1$ ".

**Initialisation**: $0 < U_0 < 1$, par hypothèse.

Donc **vrai au rang " 0 "**.

**Hérédité**: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 < U_n < 1$ **(c'est le cas car $U_n \in \left]0 ; \frac{1}{e}\right]$)**

et montrons qu'alors: $0 < U_{n+1} < 1$.

**Supposons**: $\underbrace{0 < U_n \leqslant \frac{1}{e}}_{(1)} < 1$, pour un entier naturel $n$ fixé.

**Comme $f$ est décroissante sur $\left]0 ; \frac{1}{e}\right]$ et est continue sur $\left]0 ; \frac{1}{e}\right]$:**

$(1) \Rightarrow 0 < U_n \leqslant \frac{1}{e}$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) \leqslant f(U_n) < \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{e} \leqslant U_{n+1} < 1$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$, **car**: $1 - \frac{1}{e} > 0$.

**Conclusion**: **Pour tout entier naturel $n$, avec $U_n \in \left]0 ; \frac{1}{e}\right]$, $0 < U_n < 1$.**

**2ème cas:** $U_n \in [\frac{1}{e}; 1[$ **et donc $f$ est croissante.**

**Initialisation:** $0 < U_0 < 1$, par hypothèse.

Donc **vrai au rang " 0 "**.

**Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 < U_n < 1$ **(c'est le cas car $U_n \in [\frac{1}{e}; 1[$)**

et montrons qu'alors: $0 < U_{n+1} < 1$.

**Supposons:** $\underbrace{0 < \frac{1}{e} \leq U_n < 1}_{(1)}$, pour un entier naturel $n$ fixé.

**Comme $f$ est croissante sur $[\frac{1}{e}; 1[$ et est continue sur $[\frac{1}{e}; 1[$:**

$(1) \Rightarrow \frac{1}{e} \leq U_n < 1$

$\Rightarrow f(\frac{1}{e}) \leq f(U_n) < f(1)$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{e} \leq U_{n+1} < 1$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$, **car:** $1 - \frac{1}{e} > 0$.

**Conclusion:** **Pour tout entier naturel $n$, avec $U_n \in [\frac{1}{e}; 1[$, $0 < U_n < 1$.**

**Au total:** **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$.**

**3. b. Déduisons-en que la suite $(U_n)$ converge vers un réel $\ell$:**

Quand $n$ tend vers $+\infty$, la suite $(U_n)$ est croissante et est majorée par $M = 1$.
Elle est donc **convergente**.

**Ainsi**: la suite $(U_n)$ est convergente et converge vers un réel $\ell$.

## 3. c. Déterminons la limite $\ell$ :

Nous savons que la limite $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$.

D'où: $f(x) = x$ <=> $x \ln(x) + 1 = x$ <=> $\ell = 1$ (car $x > 0$).

**Ainsi**: la suite $(U_n)$ converge vers $\ell = 1$.