

ÉPREUVE MATHÉMATIQUES

SciencesPo - Paris, 2018

CORRIGÉ - freemaths.fr

Pour s'entraîner :

- **Problème :**
- Analyse I, 2^e édition - Alain Piller
 - Fonctions, Intégrales, T. S - freemaths.fr

► **Exercice :**

► **Thème sur freemaths.fr (selon la question)**

- Suites, T. S [Q. 1, Q. 4, Q. 5 et Q. 6]
- Fonctions, Intégrales, T. S [Q. 7, Q. 8 et Q. 9]
- Probabilités Discrètes, T. S [Q. 2 et Q. 3]
- Probabilités Discrètes, T. ES [Q. 2 et Q. 3]
- Géométrie dans l'Espace, T. S [Q. 10]

PROBLÈME (8 points)

[Analyse I, 2^e édition - Alain Piller
freemaths.fr: Fonctions, Intégrales, T. S et T. ES]

Partie A:

1. Montrons que pour tout x strictement positif, $f'(x) = 2ax - \frac{2b}{x^3} - \frac{2\ln(x)}{x}$.

Ici: • $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2} - (\ln(x))^2$

• $Df =]0; +\infty[$.

Posons: $f = f_1 + f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = ax^2$, $f_2(x) = \frac{b}{x^2}$ et $f_3(x) = -(\ln(x))^2$.

f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur $]0; +\infty[$.

f_2 est dérivable sur $]0; +\infty[$, avec pour tout $x \in]0; +\infty[$: $x^2 \neq 0$.

f_3 est dérivable sur $]0; +\infty[$ car la fonction "ln" est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Donc, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme ($f_1 + f_2 + f_3$) de 3 fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: • $f'_1(x) = 2ax$

• $f'_2(x) = \frac{-2b}{x^3}$

$$\bullet f'_3(x) = -2x(\ln(x)) \times \frac{1}{x} \text{ cad: } f'_3(x) = \frac{-2\ln(x)}{x}.$$

$$\text{D'où pour tout } x \in]0; +\infty[: f'(x) = 2ax - \frac{2b}{x^3} - \frac{2\ln(x)}{x}.$$

2. Déterminons les réels a et b:

D'après l'énoncé: • Cf passe par le point A (1; 0,5),

$$\text{donc: } f(1) = 0,5,$$

• Cf admet une tangente horizontale au point A,

$$\text{donc: } f'(1) = 0.$$

Nous avons donc le système suivant:

$$\begin{cases} f(1) = 0,5 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0,5 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0,5 \\ a = b \end{cases}.$$

D'où: $a = 0,25$ et $b = 0,25$.

Ainsi, les réels a et b ont pour valeurs: $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$.

Nous pouvons alors écrire, pour tout $x \in]0; +\infty[:$

$$\bullet f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2$$

$$\bullet f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^3} - \frac{2\ln(x)}{x}.$$

Partie B:

1. a. Factorisons l'expression $2X^2 - 4X + 2$:

$$\begin{aligned} 2X^2 - 4X + 2 &= 2(X^2 - 2X + 1) \\ &= 2(X - 1)^2. \end{aligned}$$

Ainsi: $2X^2 - 4X + 2 = 2(X - 1)^2$.

1. b. Déduisons-en une factorisation de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$:

Posons: $X = x^2$.

D'où: $2X^2 - 4X + 2 = 2x^4 - 4x^2 + 2$.

Dans ces conditions, comme $2X^2 - 4X + 2 = 2(X - 1)^2$, une factorisation de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ s'écrit:

$$2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Notons qu'on aurait pu aussi écrire: $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2[(x - 1)(x + 1)]^2$
 $= 2(x - 1)^2(x + 1)^2$.

2. Déterminons le signe de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ en fonction de x :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous savons que: $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2$.

Ainsi le signe de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ dépend du signe de $(x^2 - 1)^2$.

- Distinguons 2 cas:
- pour $x = 1$ et $x = -1$, $(x^2 - 1)^2 = 0$,
 - pour $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $(x^2 - 1)^2 > 0$.

Donc, pour tout nombre réel x : $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2 \geq 0$.

Partie C:

1. Déterminons le sens de variation de la fonction g sur $]0; +\infty[$:

Ici: • $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln(x)$

• $Dg =]0; +\infty[$.

Etape 1: détermination de g' pour tout $x \in]0; +\infty[$

Posons: $g = g_1 + g_2 + g_3$, avec: $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $g_3(x) = -4 \ln(x)$.

g_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur $]0; +\infty[$.

g_2 est dérivable sur $]0; +\infty[$, avec pour tout $x \in]0; +\infty[$: $x^2 \neq 0$.

g_3 est dérivable sur $]0; +\infty[$ car la fonction "ln" est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Donc, g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme ($g_1 + g_2 + g_3$) de 3 fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: • $g'_1(x) = 2x$

• $g'_2(x) = \frac{2}{x^3}$

• $g'_3(x) = -\frac{4}{x}$.

D'où pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x}$.

Etape 2: détermination du signe de g' pour tout $x \in]0; +\infty[$

Pour tout $x \in]0; +\infty [$: $g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x}$.

En réduisant au même dénominateur, nous obtenons, pour tout $x \in]0; +\infty [$:

$$g'(x) = \frac{2x^4 + 2 - 4x^2}{x^3} \quad \text{cad:} \quad g'(x) = \frac{2x^4 - 4x^2 + 2}{x^3}.$$

Or, d'après **Partie B**: • $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2$

• $2(x^2 - 1)^2 \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc ici, pour tout $x \in]0; +\infty [$ nous pouvons affirmer que:

• $x^3 > 0$

• $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)^2}{x^3} \geq 0$.

Comme, pour tout $x \in]0; +\infty [$, $g'(x) \geq 0$: la fonction g est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty [$.

2. a. Calculons $g(1)$:

Nous avons: $g(1) = (1)^2 - \frac{1}{(1)^2} - 4 \ln(1)$ cad: $g(1) = 0$.

2. b. Déduisons-en le signe de la fonction g sur $]0; +\infty [$:

$g(1) = 0$, donc sur $]0; +\infty [$, nous allons distinguer 2 cas:

• si $x \in]0; 1]$, alors: $g(x) \leq g(1) = 0$

(car la fonction g est croissante sur $]0; 1]$),

• si $x \in]1; +\infty [$, alors: $g(x) \geq g(1) = 0$

(car la fonction g est croissante sur $]1; +\infty [$).

- Donc:
- g est négative sur $]0; 1]$,
 - g est positive sur $]1; +\infty[$.

Partie D:

1. Montrons que pour tout réel x strictement positif, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$:

Ici:

- $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2$
- $D_f =]0; +\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right) - (-\ln(x))^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{4} \times x^2\right) - (\ln(x))^2. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in]0; +\infty[$, nous avons:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (\ln(x))^2 \\ &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2. \end{aligned}$$

Et donc: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.

2. a. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in]0; +\infty[: \quad f(x) &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2 \\ &= x^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \frac{(\ln(x))^2}{x^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Or: } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2$$

= 0, d'après le Théorème des Croissances comparées,

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^4} = 0.$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \frac{(\ln(x))^2}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{4} + 0 - 0 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4}.$$

$$\text{Au total, la limite de } f \text{ en } +\infty \text{ est: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4}$$

$$= +\infty.$$

2. b. Déterminons la limite de f en 0^+ :

$$\text{Nous savons que pour tout } x \in]0; +\infty[: \quad f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Posons: $X = \frac{1}{x}$, avec: $x \in]0; +\infty [$.

Dans ces conditions: $\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} X = +\infty,$

$$\bullet f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = f(X).$$

Donc: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X).$

Or: $\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty$, d'après a.

Donc, la limite de f en zéro est: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$

3. a. Montrons que pour tout réel $x \in]0; +\infty [$, $f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)$:

D'après **Partie A 1.**, pour tout $x \in]0; +\infty [$: $f'(x) = 2ax - \frac{2b}{x^3} - 2 \frac{\ln(x)}{x}.$

Or: $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{4}.$

D'où, pour tout $x \in]0; +\infty [$: $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^3} - \frac{2 \ln(x)}{x}.$

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \left[x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln(x) \right]$$

$$= \frac{1}{2x} \times g(x), \text{ car: } g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln(x).$$

Au total, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, nous avons bien: $f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)$.

3. b. Déduisons-en le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$:

Nous venons de montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)$.

Or sur $]0; +\infty[$: $\frac{1}{2x} > 0$.

Donc: le signe de f' est le même que celui de g , sur $]0; +\infty[$.

Or, d'après Partie C 2. b: • g est négative sur $]0; 1]$,

• g est positive sur $]1; +\infty[$.

Ainsi: • f' est négative sur $]0; 1]$,

• f' est positive sur $]1; +\infty[$.

Et donc: • f est décroissante sur $]0; 1]$,

• f est croissante sur $]1; +\infty[$.

Partie E:

1. Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$:

Posons, pour tout $x \in]0; 1]$: $h(x) = f(x) - x$.

La question revient donc à montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; 1]$.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • h est continue sur $]0; 1]$ comme différence ($f(x) - x$) de deux fonctions continues sur $]0; 1]$.

- " $k = 0$ " est compris entre: $h(1) = -\frac{1}{2} < 0$

$$\text{et: } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty.$$

- h est strictement décroissante sur $]0; 1]$ car pour tout $x \in]0; 1]$:

$$h'(x) = f'(x) - 1 \text{ cad: } h'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^3} - \frac{2 \ln(x)}{x} - 1 < 0,$$

(f' est négative sur $]0; 1]$ d'après Partie D 3. b.)

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) - x = 0$ ($k = 0$) admet une **unique** solution α appartenant à $]0; 1[$, et plus exactement sur $]0; 1[$.

Au total: $h(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $]0; 1[$.

2. Montrons que l'équation $f(x) = \frac{l}{x}$ admet une unique solution β sur $]1; +\infty[$:

D'après **Partie D 1.**, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f(x) = f\left(\frac{l}{x}\right)$.

D'où, pour tout $x \in]1; +\infty[$, nous avons: $f(x) = f\left(\frac{l}{x}\right)$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{l}{x} \Leftrightarrow f\left(\frac{l}{x}\right) = \frac{l}{x}$.

Posons: $X = \frac{l}{x}$, avec: $x \in]1; +\infty[$.

D'où: $X \in \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{l}{x}\right); \frac{l}{1} \right[=]0; 1[$.

Donc: $f(x) = \frac{l}{x} \Leftrightarrow f\left(\frac{l}{x}\right) = \frac{l}{x} \Leftrightarrow f(X) = X$, avec: $X \in]0; 1[$.

Ainsi, d'après la question précédente, nous pouvons affirmer que l'équation $f(X) = X$ (ou: $f(X) - X = 0$) sur $]0; 1[$ admet une **unique** solution α .

Et nous avons: $X = \alpha \Leftrightarrow \frac{l}{x} = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{l}{\alpha} = \beta$.

Au total, l'équation $f(x) = \frac{l}{x}$ admet bien une **unique** solution β sur $]1; +\infty[$:

$$\beta = \frac{l}{\alpha}$$

3. Montrons que $\alpha \times \beta = 1$:

Comme nous l'avons vu à la question précédente: $\beta = \frac{1}{\alpha}$.

D'où: $\alpha \times \beta = 1$.

4. a. Écrivons un algorithme permettant d'afficher un encadrement de α à 10^{-2} près:

L'algorithme demandé est:

```

0,1  → a
1    → b

while  b - a > 0,01
    if  h( $\frac{a+b}{2}$ ) > 0
        then  $\frac{a+b}{2}$  → a
        else  $\frac{a+b}{2}$  → b
    end if
end while

Afficher (a, b)

```

4. b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est: $0,54 < \alpha < 0,55$.

EXERCICE: Vrai ou Faux ? (12 points)

1. C'est faux.

- Soient:
- C_i , le capital initial
 - C_f , le capital final **cad**: au bout de 20 ans
 - Γ , le taux d'intérêt annuel = 3%
 - n , le nombre d'années = 20 ans.

Nous avons:

$$\begin{aligned} C_f &= (1 + \Gamma)^n C_i \\ &= (1,03)^{20} C_i \\ &\approx 1,806 C_i. \end{aligned}$$

Ainsi: le capital initial placé sera multiplié par environ 1,806 au bout de 20 ans.

Comme: $1,806 < 2$, la somme totale disponible au bout de 20 ans ne sera pas supérieure ou égale au double du capital placé.

Donc l'affirmation est fausse.

2. C'est vrai.

Soit N la variable aléatoire égale au **nombre de numéros différents obtenus**, après trois tirages successifs avec remise.

Les boules sont numérotées: 1, 2 et 3.

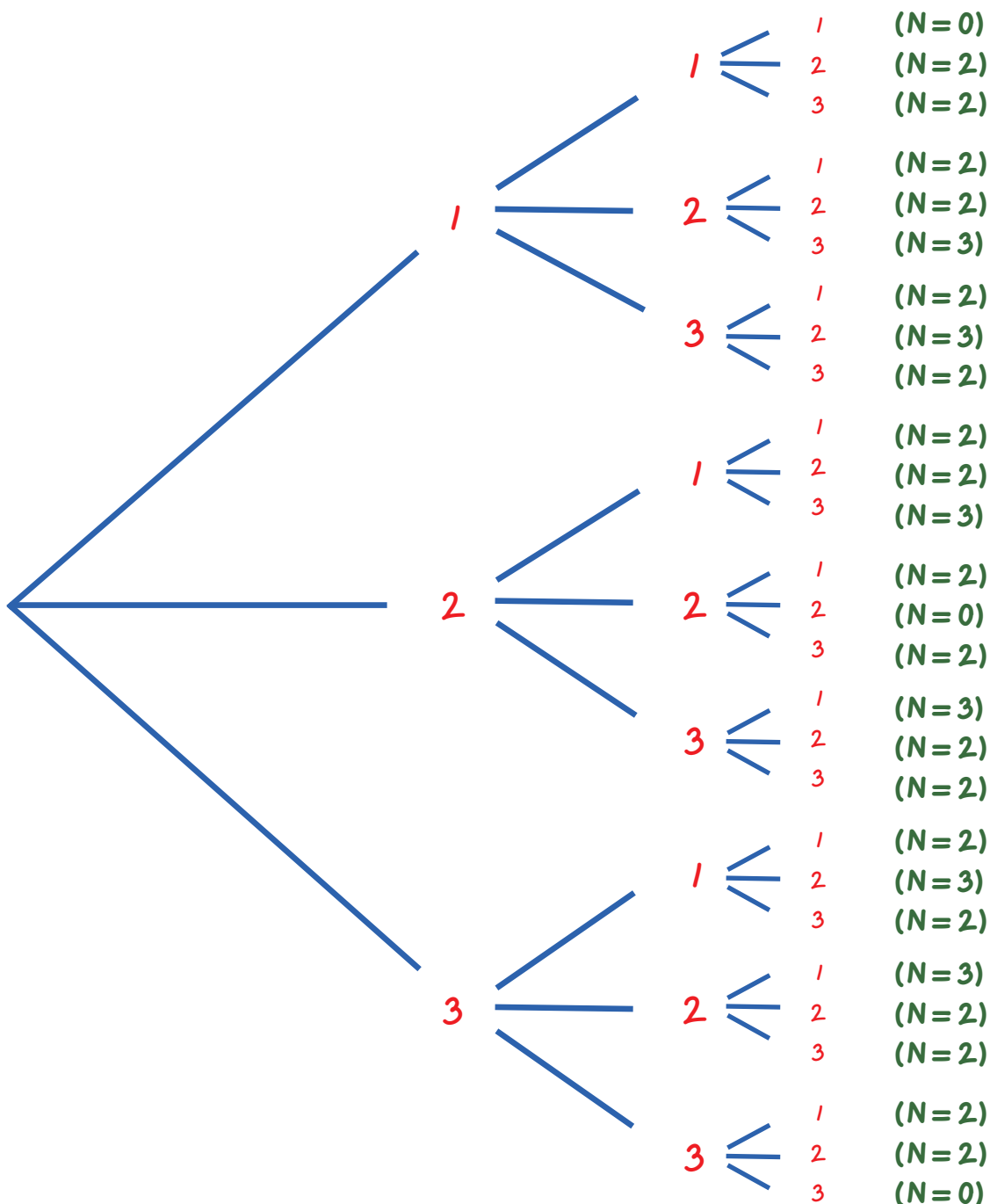
Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N sont: $\{0, 2, 3\}^*$.

*: en effet: • soit les 3 boules ont le même numéro et donc $N = 0$,

- soit il y a 2 boules avec le même numéro et une 3^e avec un numéro différent et donc $N = 2$,
- soit les 3 boules ont des numéros différents et donc $N = 3$.

- Notons que:
- $N = 0$ signifie 0 numéro différent sur les 3 boules,
 - $N = 2$ signifie 2 numéros différents sur les 3 boules,
 - $N = 3$ signifie 3 numéros différents sur les 3 boules.

Construisons un arbre:



D'où: • $P(N=0) = 3 \times \frac{1}{27} \Rightarrow P(N=0) = \frac{3}{27}$.

• $P(N=2) = 18 \times \frac{1}{27} \Rightarrow P(N=2) = \frac{18}{27}$.

• $P(N=3) = 6 \times \frac{1}{27} \Rightarrow P(N=3) = \frac{6}{27}$.

Dans ces conditions, la loi de probabilité de la variable aléatoire N est:

$N = n_i$	0	2	3
$P(N = n_i)$	$\frac{3}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$

Nous pouvons remarquer que: $\frac{3}{27} + \frac{18}{27} + \frac{6}{27} = 1$.

Nous avons donc: $E(N) = \left(0 \times \frac{3}{27}\right) + \left(2 \times \frac{18}{27}\right) + \left(3 \times \frac{6}{27}\right)$

cad: $E(N) = 2$.

Ainsi: l'espérance de N est égale à 2.

Comme: $2 > \frac{3}{2}$, l'espérance de N est strictement supérieure à $\frac{3}{2}$.

Donc l'affirmation est vraie.

3. C'est faux.

Soient les événements: $C =$ " conforme ", et $\bar{C} =$ " non conforme ".

On désigne par X le nombre de véhicules non conformes sur un lot de 100 véhicules prélevé au hasard.

Nous sommes en présence de 100 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de \bar{C} suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 100$ et $p = 3\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(100; 3\%)$.

En fait, on répète 100 fois un schéma de Bernoulli.

Ici, il s'agit de calculer: $P(X = 0)$.

(aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux)

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{100}{0} (3\%)^0 (1 - 3\%)^{100} \\ &= (1 - 3\%)^{100} \neq 1 - (3\%)^{100}. \end{aligned}$$

Comme: $(1 - 3\%)^{100} \neq 1 - (3\%)^{100}$, la probabilité qu'aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux n'est pas égale à $1 - 0,03^{100}$.

Donc l'affirmation est fausse.

4. C'est vrai.

4. a. En ce qui concerne la suite (U_n) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 2 + (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n)$

$$= 2 + \left[\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1 \right], \text{ car: } 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= 2 + [2^{n+1} - 1 - 1]$$

$$= 2^{n+1}$$

$$= 4 \times (2)^{n-1}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = U_1 \times (q)^{n-1}$, avec $U_1 = 4$ et $q = 2$.

Ainsi: la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $U_1 = 4$.

4. b. En ce qui concerne la suite (V_n) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = U_n - 1$.

Dans ces conditions: • $V_1 = U_1 - 1 = 3$, ($U_1 = 4$)

• $V_2 = U_2 - 1 = 7$, ($U_2 = 8$)

• $V_3 = U_3 - 1 = 15$. ($U_3 = 16$)

Or: $\frac{V_1}{V_2} \neq \frac{V_2}{V_3}$ car $\frac{3}{7} \neq \frac{7}{15}$.

Ainsi: la suite (V_n) n'est pas une suite géométrique.

Donc l'affirmation est vraie.

5. C'est vrai.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel p tel que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot U_n = p$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot U_n = p \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{n}.$$

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{n} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

Ainsi: oui, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

Donc l'affirmation est vraie.

6. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons avoir recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $U_n = n + 1$ ".

Initialisation: $U_1 = 10 \times U_0 - 9 \times 0 - 8$ (car: $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 10U_n - 9n - 8$)
 $= 10 \times 1 - 9 \times 0 - 8$, car: $U_0 = 1$, d'après l'énoncé.

D'où: $U_1 = 2$.

Et: $U_1 = 1 + 1 = 2$, car: $U_n = n + 1$.

Donc vrai au rang " 1".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n = n + 1$

et montrons qu'alors: $U_{n+1} = (n + 1) + 1$.

Supposons: $U_n = n + 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow 10 U_n = 10 n + 10$$

$$\Rightarrow 10 U_n - 9 n = 10 n + 10 - 9 n$$

$$\Rightarrow 10 U_n - 9 n - 8 = 10 n + 10 - 9 n - 8$$

$$\Rightarrow 10 U_n - 9 n - 8 = n + 2$$

$$\Rightarrow 10 U_n - 9 n - 8 = (n + 1) + 1$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = (n + 1) + 1 \quad (\text{car: } U_{n+1} = 10 U_n - 9 U_n - 8).$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons bien: $U_n = n + 1$.

Donc l'affirmation est vraie.

7. C'est faux.

Pour le justifier, nous allons prendre un contre exemple.

Soient f et g , deux fonctions définies sur \mathbb{R} comme suit:

- $f(x) = 3x + 7$

- $g(x) = 3x$.

Nous avons: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$,

- pour tout réel x : $f(x) > g(x)$ (car: $7 > 0$)

Or, pour tout réel x : $f(x) - g(x) = 7$.

Et donc: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 7$.

Comme $7 \neq +\infty$, pour tout réel x : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) \neq +\infty$.

Donc l'affirmation est fausse.

8. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons calculer d'une part $f(2x)$, d'autre part $\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$ et comparer les deux résultats obtenus.

Calcul de $f(2x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \text{ d'après l'énoncé.}$$

$$\text{Dans ces conditions: } f(2x) = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcul de $\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \text{ d'après l'énoncé.}$$

$$\text{Dans ces conditions: } \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2 \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)}{1 + \left[\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right]^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{2(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 1}}{\frac{(e^{2x} + 1)^2 + (e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(e^{2x} - 1)(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2 + (e^{2x} - 1)^2} \\
 &= \frac{2(e^{2x} - 1)(e^{2x} + 1)}{2(e^{4x} + 1)} \\
 &= \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1} \quad ((a-b)(a+b) = a^2 - b^2).
 \end{aligned}$$

D'où: $\frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2} = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Comme $f(2x) = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}, \forall x \in \mathbb{R}: f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$

Donc l'affirmation est vraie.

9. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons utiliser la formule: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Ici: } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{8 + 2\sqrt{12}}{16}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < 0$$

$$\text{ou: } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} > 0.$$

Comme, d'après le cercle trigonométrique: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$, nous retiendrons

uniquement la solution $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < 0$.

Donc l'affirmation est vraie.

10. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons procéder en 3 étapes.

Étape 1: détermination des coordonnées du point B.

Le point A a pour coordonnées: $A(a; a^2)$, avec: $a > 0$.

Soit le point B, avec $B(x; y)$.

D'après l'énoncé: " B est le point d'intersection entre la parabole et la perpendiculaire à la droite (OA) passant par O ".

Dans ces conditions: les vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont orthogonaux.

Or: $A(a; a^2)$ et $B(x; y)$, avec: $y = x^2$ car B appartient à la parabole.

D'où: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, les vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont orthogonaux ssi: $OA \cdot OB = 0$.

$$\text{Ici: } OA \cdot OB = 0 \Leftrightarrow (a \cdot x) + (a^2 \cdot x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot x (1 + a \cdot x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + a \cdot x = 0, \text{ car: } a \cdot x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{a}$$

D'où les coordonnées du point B sont: $B\left(-\frac{1}{a}; \frac{1}{a^2}\right)$, avec: $a > 0$ et $y = x^2$.

Étape 2: détermination de l'équation de la droite Δ passant par les deux points A et B.

L'équation de la droite Δ s'écrit: $y = c \cdot x + d$.

Nous devons déterminer c et d.

Le point A $\in \Delta$, d'où: $a^2 = c \cdot a + d$ (1).

Le point B $\in \Delta$, d'où: $\frac{1}{a^2} = c \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) + d$ (2).

Dans ces conditions c et d sont solutions du système: $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$.

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = c \cdot a + d \\ \frac{1}{a^2} = -\frac{c}{a} + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \cdot a + d = a^2 \\ c \cdot a + \frac{c}{a} = a^2 - \frac{1}{a^2} \quad (1) - (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c \cdot a + d = a^2 \\ c = \frac{\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)}{\left(a + \frac{1}{a}\right)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c \cdot a + d = a^2 \\ c = a - \frac{1}{a} \end{cases} \quad ((a^2 - b^2) = (a + b)(a - b))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = a^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot a \\ c = a - \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = a - \frac{1}{a} \end{cases}$$

Ainsi l'équation de la droite Δ est: $y = \left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot x + 1$.

Étape 3: le point K (0; 1) appartient-il à la droite (AB) = Δ ?

L'équation de la droite Δ s'écrit: $y = \left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot x + 1$.

Comme ici $x_k = 0$: la valeur de y_k est égale à 1, $\forall a > 0$.

Ainsi: oui, le point K (0; 1) appartient à la droite (AB), $\forall a > 0$.

Donc l'affirmation est vraie.