ÉPREUVE MATHÉMATIQUES
SciencesPo - Paris, 2017

CORRIGÉ - freemaths.fr

Pour s'entraîner :

▸ **Problème :** • Microéconomie, 12e édition - Alain Piller

• Fonctions, Intégrales, T. S - freemaths.fr

▸ **Exercice :**

▸ Thème sur freemaths.fr (**selon la question**)

• Suites, T. S [Q. 3 et Q. 6]

• Fonctions, Intégrales, T. S [Q. 1]

• Probabilités Discrètes, T. S [Q. 2, Q. 7 et Q. 10]

• Probabilités Discrètes, T. ES [Q. 2, Q. 7 et Q. 10]

• Probabilités à Densité, T. S [Q. 7]

• Géométrie dans l'Espace, T. S [Q. 4]

PROBLÈME (11 points)

[Microéconomie, 12[e] édition - Alain Piller
freemaths.fr : Fonctions, Intégrales, T. S]

Partie A : Recette et Élasticité

1. Vérifions que pour tout entier naturel $p \in [\,30\,;\,119\,]$, $E(p) = \dfrac{p}{p - 120}$:

• Ici : • $f(p) = 2\,400 - 20p$

• $Df = [\,30\,;\,119\,]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[\,30\,;\,119\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $p \in [\,30\,;\,119\,]$.

Pour tout $p \in [\,30\,;\,119\,]$: $f'(p) = -20$.

• Dans ces conditions : $E(p) = \dfrac{p \times f'(p)}{f(p)}$ <=> $E(p) = \dfrac{p \times (-20)}{2\,400 - 20p}$

<=> $E(p) = \dfrac{-2 \times p}{240 - 2p}$

=> $E(p) = \dfrac{p}{p - 120}$,

avec : $p \neq 120$ car $p \in [\,30\,;\,119\,]$.

Au total, pour tout $p \in [\,30\,;\,119\,]$: $E(p) = \dfrac{p}{p - 120}$.

2. Déterminons les prix p pour lesquels la demande est élastique:

La demande est élastique si $E(p) < -1$.

Dans ces conditions: $E(p) < -1 \iff \dfrac{p}{p - 120} < -1$

$\iff p > -p + 120$ car: $p \in [30; 119]$

$\iff 2p > 120$

$\Rightarrow p > 60$ cad: $p \in]60; 119]$.

Au total, la demande est élastique si les prix p sont tels que: $p \in]60; 119]$.

3. Calculons la recette mensuelle maximale:

La recette mensuelle $R(p)$ est maximale lorsque: $E(p) = -1$.

Or: $E(p) = -1$ ssi $\dfrac{p}{p - 120} = -1$ cad: $p = 60$ €.

Dans ces conditions: $R_{max}(p) = 60 \times (2\,400 - 20 \times (60))$

cad: $R_{max}(p) = 72\,000$ €.

Au total, la recette mensuelle maximale est de: $72\,000$ €.

4. Retrouvons le résultat précédent en étudiant la fonction $R(p)$ sur $[30; 119]$:

• **Calcul de R':**

Ici: • $R(p) = p \times f(p) \iff R(p) = -20p^2 + 2\,400p$

• $D_R = [30; 119]$.

R est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[30; 119]$.

Ainsi, nous pouvons calculer R' pour tout $p \in [30; 119]$.

Pour tout $p \in [30; 119]$: $R'(p) = -40p + 2\,400$.

• **Tableau de variation de R**:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $p \in [30; 119]$.

• **1er cas**: $R'(p) = 0$.

$R'(p) = 0 \iff -40p + 2\,400 = 0 \Rightarrow p = 60$€.

• **2ème cas**: $R'(p) < 0$.

$R'(p) < 0 \iff -40p + 2\,400 < 0 \Rightarrow p > 60$€ ou $p \in]60; 119]$.

• **3ème cas**: $R'(p) > 0$.

$R'(p) > 0 \iff -40p + 2\,400 > 0 \Rightarrow p < 60$€ ou $p \in [30; 60[$.

Ainsi: • R est croissante sur $[30; 60]$.

• R est décroissante sur $[60; 119]$.

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

p	30		60		119
R'		+	0	-	
R	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = R(30) \Rightarrow a = 54\,000$€,

• $b = R(60) \Rightarrow b = 72\,000$€,

• $c = R(119) \Rightarrow c = 2\,380$€.

• **Déduisons-en alors R_{max}:**

La fonction $\mathbf{R}(p)$ atteint un maximum en: $p = 60$€.

Dans ces conditions: $\mathbf{R}(60) = b = 72\,000$€.

Au total, nous avons bien: $R_{max}(p) = 72\,000$€.

Partie B: Étude d'un cas particulier

1. a. Etudions les variations de f sur $[\ 1 ; +\infty\ [$:

• **Calcul de f':**

Ici: • $f(x) = (2x + 10)\ e^{-0,5x}$

• $Df = [\ 1 ; +\infty\ [$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = 2x + 10$ et $f_2(x) = e^{-0,5x}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Donc, f est dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$ comme produit $(f_1 \times f_2)$ de 2 fonctions dérivables sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$.

Pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$: $f'(x) = 2 \times e^{-0,5x} + (2x + 10) \times (-0,5e^{-0,5x})$

$$\Rightarrow f'(x) = -x\ e^{-0,5x} - 3e^{-0,5x}.$$

• **Tableau de variation de f:**

Pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$: $f'(x) = (-x - 3) \times e^{-0,5x} < 0$, sur IR: $e^{-0,5x} > 0$.

Ainsi: f est strictement décroissante sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	1 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
f'	$-$
f	$d \searrow e$

Avec: • $d = f(1) \Rightarrow d = \dfrac{12}{e^{0,5}}$,

• $e = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow e = ?$ (voir question suivante)

1. b. • Déterminons la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 10}{e^{0,5x}}$$

$= 0$, d'après le Théorème des Croissances Comparées.

[En $+\infty$, exponentielle croît plus vite que polynome].

• En quoi ce résultat est-il cohérent ?

Cela est cohérent car signifie que lorsque le prix du produit informatique tend vers l'infini, alors la demande hebdomadaire sur ce produit sera nulle.

[En bref, si le prix du bien est exorbitant, plus personne ne l'achètera !].

1. c. Déterminons le prix de ce produit informatique à l'euro près pour que la recette soit maximale:

Ici: • $R(x) = x \times f(x) \iff R(x) = (2x^2 + 10x)\, e^{-0,5x}$

- $D_R = [\,1 ; +\infty\,[$.

Posons: $R = R_1 \times R_2$, avec: $R_1(x) = 2x^2 + 10x$ et $R_2(x) = e^{-0,5x}$.

R_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[\,1 ; +\infty\,[$.

R_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[\,1 ; +\infty\,[$.

Donc, R est dérivable sur $[\,1 ; +\infty\,[$ comme produit **($R_1 \times R_2$)** de 2 fonctions dérivables sur $[\,1 ; +\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer R' pour tout $x \in [\,1 ; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,1 ; +\infty\,[$: $R'(x) = (4x + 10) \times e^{-0,5x} + (2x^2 + 10x) \times (-0,5e^{-0,5x})$

$$\Rightarrow \quad R'(x) = (-x^2 - x + 10) \times e^{-0,5x}.$$

D'après le cours, le maximum de la fonction R vérifie les deux conditions suivantes:

- $R'(x) = 0$
- $R''(x) < 0$, en ce point.

- $R'(x) = 0 \iff -x^2 - x + 10 = 0$ car: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,5x} > 0$.

Soit l'équation $-x^2 - x + 10 = 0$.

$\Delta = 41 > 0$, d'où 2 solutions dans $\mathbb{R}$.

$$x' = \frac{1 - \sqrt{41}}{-2} \iff x' = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2} \in [\,1 ; +\infty\,[$$

$$x'' = \frac{1 + \sqrt{41}}{-2} \iff x'' = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \notin [\,1 ; +\infty\,[.$$

Par conséquent, nous retiendrons: $x' = \dfrac{-1 + \sqrt{41}}{2}$.

• $R''(x') < 0$?

$R''(x) = (-2x - 1) \times e^{-0,5x} + (-x^2 - x + 10) \times (-0,5e^{-0,5x})$

$\Rightarrow R''(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x - 6\right) e^{-0,5x}$ (1).

En remplaçant " x " par " $\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$ " dans (1), on obtient bien: $R''(x') < 0$.

Au total, le prix recherché est: $p^* = \frac{-1+\sqrt{41}}{2}$ cad: $p^* \approx 3$€.

2. a. Vérifions que pour tout $x \geqslant 1$, $E(x) = \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10}$ et donnons le signe de cette expression:

Nous savons que: $E(x) = \frac{x \times f'(x)}{f(x)}$.

D'où ici: $E(x) = \frac{x \times (-x - 3)\, e^{-0,5x}}{(2x + 10)\, e^{-0,5x}}$

$\Rightarrow E(x) = \frac{-x^2 - 3x}{(2x + 10)\, e^{-0,5x}}$, pour tout $x \in [\,1 ; +\infty\,[$.

Au total, pour tout $x \geqslant 1$: • $E(x) = \frac{-x^2 - 3x}{(2x + 10)\, e^{-0,5x}}$,

• $E(x) < 0$.

2. b. Calculons une valeur approchée du taux de variation de la demande lorsque le prix passe de 1000€ à 1010€:

Lorsque le prix passe de 1000€ à 1010€, cela correspond à une hausse de 1% de ce prix.

Dans ces conditions, une valeur approchée du taux de variation de la demande est: $E(10)$.

Or: $E(10) = \dfrac{-10^2 - 3 \times 10}{2 \times 10 + 10}$ => $E(10) \approx -4,33.$

Ainsi, une valeur approchée du taux de variation de la demande est d'environ:

$-4,33\%.$

Donc une hausse des prix de 1% induit une baisse de la demande de 4,33%.

2. c. Résolvons l'équation $E(x) = -3,15$ et interprétons le résultat:

$$E(x) = -3,15 \iff \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10} = -3,15$$

$$\iff -x^2 - 3x = -6,30x - 31,5$$

$$\iff -x^2 + 3,3x + 31,5 = 0.$$

$\Delta = (11,7)^2 > 0$, d'où 2 solutions dans $\mathbb{R}$.

$$x' = \frac{-3,3 - 11,7}{-2} \iff x' = 7,5 \in [\, 1 ; +\infty [$$

$$x'' = \frac{-3,3 + 11,7}{-2} \iff x'' = -4,2 \notin [\, 1 ; +\infty [.$$

Par conséquent, nous retiendrons: $x' = 7,5$€.

Au total: $E(x) = -3,15$ ssi $x = 7,5$€.

Cela signifie que si le prix est de 7,5€, $E(x) = -3,15 < 0$ et par conséquent la demande est élastique.

2. d. Pour quels prix la demande de ce produit informatique est-elle peu élastique ?

Donc la demande est peu élastique ssi: $-1 < E(x) < 0.$

$$-1 < E(x) < 0 \iff -1 < \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10} < 0$$

$\iff -2x - 10 < -x^2 - 3x < 0$

$\iff -x^2 - 3x > -2x - 10$ **et** $-x^2 - 3x < 0.$

- L'inéquation $-x^2 - 3x < 0$ est toujours vérifiée car $x \in [\ 1 ; +\infty\ [.$
- Résolvons l'inéquation: $-x^2 - 3x > -2x - 10.$

$-x^2 - 3x > -2x - 10 \iff -x^2 - x + 10 > 0.$

Nous savons, d'après **Partie B, 2.**, que l'équation $-x^2 - x + 10 = 0$

admet 2 solutions: $x' = \dfrac{-1 + \sqrt{41}}{2}$ et $x'' = \dfrac{-1 - \sqrt{41}}{2}.$

Seule la solution x' sera retenue car $x'' \notin [\ 1 ; +\infty[.$

Au total: la demande de ce produit informatique est peu élastique si le prix du produit appartient à $\left[\ 1 ; \dfrac{-1 + \sqrt{41}}{2} \right[.$

Partie C: Étude théorique

1. a. Calculons l'élasticité de $f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$:

$$E_f(x) = \frac{x \times f'(x)}{f(x)} \iff E_f(x) = \frac{x \times (n\,x^{n-1})}{x^n}$$

$$\Rightarrow E_f(x) = n \geqslant 1, \text{ pour tout } x \in]\,0 ; +\infty\,[.$$

Par conséquent: $E_f(x) = n$ cad: $E_f(x) =$ constante, avec $n \geqslant 1.$

1. b. Calculons l'élasticité de la fonction exponentielle sur $]\,0 ; +\infty\,[$:

$$E_f(x) = \frac{x \times f'(x)}{f(x)} \iff E_f(x) = \frac{x \times e^x}{e^x}, \text{ avec: } f(x) = e^x$$

$\Rightarrow \quad E_f(x) = x$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Par conséquent: $E_f(x) = x$, quand: $f(x) = e^x$.

2. a. Montrons que pour tout $x > 0$, $E_{\lambda \times f}(x) = E_f(x)$:

Soit la fonction: $g = \lambda \times f$, pour tout $x > 0$.

$$E_g(x) = \frac{x \times g'(x)}{g(x)} \iff E_g(x) = \frac{x \times (\lambda \times f'(x))}{\lambda \times f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad E_g(x) = \frac{x \times f'(x)}{f(x)}$$

$$\iff \quad E_g(x) = E_f(x).$$

Au total, nous avons bien: $E_{\lambda \times f}(x) = E_f(x)$, pour tout $x > 0$.

2. b. Montrons que pour tout $x > 0$, $E_{f \times g}(x) = E_f(x) + E_g(x)$:

$$E_{f \times g}(x) = \frac{x \times (f \times g)'(x)}{(f \times g)(x)} \iff E_{f \times g}(x) = \frac{x \times (f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x))}{f(x) \times g(x)}$$

$$\iff \quad E_{f \times g}(x) = \frac{x \times f'(x)\, g(x)}{f(x) \times g(x)} + \frac{x \times f(x)\, g'(x)}{f(x) \times g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{f \times g}(x) = \frac{x \times f'(x)}{f(x)} + \frac{x \times g'(x)}{g(x)}$$

$$\iff \quad E_{f \times g}(x) = E_f(x) + E_g(x).$$

Au total, nous avons bien: $E_{f \times g}(x) = E_f(x) + E_g(x)$, pour tout $x > 0$.

2. c. Montrons que pour tout $x > 0$, $E_{\frac{f}{g}}(x) = E_f(x) - E_g(x)$:

$$E_{\frac{f}{g}}(x) = \frac{x \times \left(\frac{f}{g}\right)'(x)}{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} \iff E_{\frac{f}{g}}(x) = \frac{\dfrac{x \times [f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)]}{[g(x)]^2}}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$$

$$\iff E_{\frac{f}{g}}(x) = \frac{x \times (f'(x)\,g(x)) - x \times (f(x)\,g'(x))}{g(x) \times f(x)}$$

$$\Rightarrow E_{\frac{f}{g}}(x) = \frac{x \times f'(x)}{f(x)} - \frac{x \times g'(x)}{g(x)}$$

$$\iff E_{\frac{f}{g}}(x) = E_f(x) - E_g(x).$$

Au total, nous avons bien: $E_{\frac{f}{g}}(x) = E_f(x) - E_g(x)$, pour tout $x > 0$.

3. Déterminons l'élasticité de $h(x) = \dfrac{2017\,e^x}{x^2}$, sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Soient: $f(x) = 2017\,e^x$ et $g(x) = x^2$, pour tout $x \in\,]\,0\,; +\infty\,[$.

$E_h(x) = E_f(x) - E_g(x)$.

Or: • $E_f(x) = \dfrac{x \times f'(x)}{f(x)} \iff E_f(x) = \dfrac{x \times (2017\,e^x)}{2017\,e^x}$

$\Rightarrow E_f(x) = x$. (prévisible grâce 1. b.)

• $E_g(x) = \dfrac{x \times g'(x)}{g(x)} \iff E_g(x) = \dfrac{x \times (2x)}{x^2}$

$\Rightarrow E_g(x) = 2$. (prévisible grâce 1. a.)

En définitive: $E_h(x) = E_f(x) - E_g(x)$ cad: $E_h(x) = x - 2$.

EXERCICE: Vrai ou Faux ? (9 points)

1. C'est faux.

Pour le justifier, nous allons prendre un contre-exemple.

Soient f et g, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme suit:

- $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + 7} + 2$
- $g(x) = \dfrac{-1}{x^2 + 7} + 2.$

Nous avons:
- pour tout réel x: $g(x) \geq f(x)$,
- pour tout réel x: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, car: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x^2 + 7} = 0.$

Et pourtant, en prenant $x = 0$: $g(0) = 2 - \dfrac{1}{7} < 2.$

Donc l'affirmation est fausse.

2. C'est faux.

Soit l'événement H = " arriver à l'heure ".

L'événement $H = (H \cap A) \cup (H \cap B) \cup (H \cap C) \cup (H \cap D)$.

D'où: $P(H) = P(H \cap A) + P(H \cap B) + P(H \cap C) + P(H \cap D)$

$$= P_A(H) \times P(A) + P_B(H) \times P(B) + P_C(H) \times P(C) + P_D(H) \times P(D).$$

Ainsi: $P(H) = \left(\dfrac{19}{20} \times \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{12}\right) + \left(1 \times \dfrac{4}{12}\right)$,

car: $P(D) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12}.$

Au total: $P(H) = \frac{113}{120} = \frac{11,3}{12} > \frac{11}{12}$.

Donc l'affirmation est fausse.

3. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons dresser un tableau.

valeur de n	valeur de k	valeur de A
6	1	$0 + \frac{1}{1} = 1$
6	2	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
6	3	$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$
6	4	$\frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$
6	5	$\frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$
6	6	$\frac{137}{60} + \frac{1}{6} = \frac{49}{20}$

Puis l'algorithme affecte à A, la valeur n A cad ici: $6 \times \frac{49}{20} = 14,7$.

Donc l'affirmation est vraie.

4. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons montrer 2 choses:

a • les points A, B et D sont alignés,

b • les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

a. Les points A, B et D sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

Or: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ici, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires car: $\overrightarrow{AB} = 7 \cdot \overrightarrow{AD}$.

Donc les points A, B et D sont bien alignés.

b. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi: $AB \cdot CD = 0$.

Or: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où: $AB . CD = (7 \times 2) + (-7 \times 2)$ => $AB \cdot CD = 0$.

Donc les droites (AB) et (CD) sont bien perpendiculaires.

Au total: D est le point d'intersection de la droite (AB) et de la perpendiculaire à cette droite passant par C.

Donc l'affirmation est vraie.

5. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons utiliser la formule: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Ici: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1$

$$\iff \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\iff \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ ou } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Nous retiendrons: $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ car $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

Donc l'affirmation est vraie.

6. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons avoir recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \geq 1$: $U_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$ ".

Initialisation: $U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 2 \times 1 - 1$, avec: $U_1 = 2$.

D'où: $U_2 = 2$.

Et: $U_2 = 16\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times 2 - 10 = 2$.

Donc vrai au rang " 2 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 1$, supposons $U_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

et montrons qu'alors: $U_{n+1} = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4(n+1) - 10$.

Supposons: $\underbrace{U_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé ($n \geq 1$).

$(1) \Rightarrow \frac{1}{2}U_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2n - 5$

$\Rightarrow \frac{1}{2}U_n + (2n-1) = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2n - 5 + (2n-1)$

$\Rightarrow U_{n+1} = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4n - 6$

$$\Rightarrow \quad U_{n+1} = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4(n+1) - 10.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous avons: $U_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 4n - 10.$

Donc l'affirmation est vraie.

7. **C'est faux.**

Soient les événements: $C =$ " atteindre la cible ", et $\overline{C} =$ " ne pas atteindre la cible ".

On désigne par X le nombre de fois où la cible est atteinte sur n lancers.

Nous sommes en présence de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de C suit donc une loi binômiale de paramètres: $n \geqslant 0$ et $p = \frac{2}{5}$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\left(n; \frac{2}{5}\right)$.

En fait, on répète n fois un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, il s'agit de calculer: $P(X \geqslant 1)$.

Or: $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^{0}\left(1 - \frac{2}{5}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow \quad P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n}.$$

Prenons le cas où: $n = 10$.

Si $n = 10$: $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$ => $P(X \geqslant 1) \approx 0,9939$.

Or : $0,9939 < 0,999$.

Donc l'affirmation est fausse.

8. C'est faux.

Soit l'équation : $2mx^2 + (4m+1)x + 2 = 0$ (1).

$\Delta = (4m+1)^2 - 4 \times 2m \times 2$ <=> $\Delta = 16m^2 - 8m + 1$.

Or, nous pouvons remarquer que : $16m^2 - 8m + 1 = (4m-1)^2$.

Distinguons 2 cas :

• si $4m - 1 \neq 0$ cad $m \neq \frac{1}{4}$, alors $\Delta > 0$ et par conséquent l'équation (1) admet 2 solutions distinctes.

• si $4m - 1 = 0$ cad $m = \frac{1}{4}$, alors $\Delta = 0$ et par conséquent l'équation (1) admet une solution double : $x' = x'' = \frac{-2}{1} = -2$.

Donc pas toujours 2 solutions distinctes.

Donc l'affirmation est fausse.

10. C'est faux.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U de toutes ses boules.

Les valeurs que peut prendre la v. a. X sont : $\{1, 2, 3\}$.

• $P(X = 1) = P$ (tirer la boule " 1 " au premier tirage) => $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.

• $P(X=2) = [\, P$ (tirer la boule " 2 " au premier tirage)

$\times$ P (tirer la boule " 1 " au second tirage)]

$+$ [P (tirer la boule " 3 " au premier tirage)

$\times$ P (tirer la boule " 1 " au second tirage)]

$$= \left[\frac{1}{3} \times 1 \right] + \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right] \Rightarrow P(X=2) = \frac{1}{2}.$$

• $P(X=3) =$ P (tirer la boule " 3 " au premier tirage)

$\times$ P (tirer la boule " 2 " au second tirage)

$\times$ P (tirer la boule " 1 " au troisième tirage)

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \Rightarrow P(X=3) = \frac{1}{6}.$$

D'où la loi de probabilité de la v. a. X est:

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Nous pouvons remarquer que: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1.$

Dans ces conditions: $E(X) = \left(1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(2 \times \frac{1}{2}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right)$

cad: $E(X) = \frac{11}{6} < 2.$

Donc l'affirmation est fausse.