ÉPREUVE MATHÉMATIQUES
SciencesPo - Paris, 2016

CORRIGÉ - freemaths.fr

Pour s'entraîner :

Problème :

- Suites, T. S - freemaths.fr
- Suites, T. ES - freemaths.fr
- Fonctions, Intégrales, T. S - freemaths.fr

Exercice :

Thème sur freemaths.fr (**selon la question**)

- Suites, T. S [Q. 9 et Q. 10]
- Fonctions, Intégrales, T. S [Q. 4, Q. 5, Q. 6 et Q. 8]
- Probabilités Discrètes, T. S [Q. 1, Q. 2 et Q. 3]
- Probabilités Discrètes, T. ES [Q. 1, Q. 2 et Q. 3]
- Géométrie dans l'Espace, T. S [Q. 7]

PROBLÈME (12 points)

[freemaths.fr : • Suites, T. S
• Suites, T. ES
• Fonctions, Intégrales, T. S]

Partie A:

1. Calculons I_1, I_2 et I_3:

• $I_1 = (1 + 2\%)\, I_0 + 500 \iff I_1 = 1,02 \times 5000 + 500 \Rightarrow I_1 = 5600$ €,

• $I_2 = (1 + 2\%)\, I_1 + 500 \iff I_2 = 1,02 \times 5600 + 500 \Rightarrow I_2 = 6212$ €,

• $I_3 = (1 + 2\%)\, I_2 + 500 \iff I_3 = 1,02 \times 6212 + 500 \Rightarrow I_3 = 6836,24$ €.

Au total: $I_1 = 5600$ €, $I_2 = 6212$ € et $I_3 = 6836,24$ €.

2. Montrons que pour tout entier n, $I_{n+1} = 1,02\, I_n + 500$:

• D'après l'énoncé, à l'ouverture du contrat en janvier 2016, le client dépose à la banque 5000 €.

D'où: $I_0 = 5000$ €.

• De plus, le 31 décembre de chaque année, le client perçoit 2% d'intérêts sur le capital de l'année écoulée et le 1er janvier de chaque année, il dépose 500 €.

Soient: • I_{n+1}, le solde de l'assurance vie au 1er janvier de l'année (2016 + (n+1)),

• I_n, le solde de l'assurance vie au 1er janvier de l'année (2016 + n).

Pour tout entier n, le solde I_{n+1} est égal au solde I_n augmenté de 2% et auquel on ajoute 500 €.

Donc pour tout entier naturel n:

$I_{n+1} = (I_n + 2\%\ I_n) + 500 \iff I_{n+1} = 1,02\ I_n + 500.$

Au total: pour tout entier n, $I_{n+1} = 1,02\ I_n + 500$.

3. Montrons que la suite (K_n) est géométrique:

$\forall\ n \in \mathbb{N}$: $K_n = I_n + 25000 \iff K_{n+1} = I_{n+1} + 25000$

$\iff K_{n+1} = (1,02 I_n + 500) + 25000 \quad (1).$

Or: $K_0 = I_0 + 25000 \Rightarrow K_0 = 30000$ et $I_n = K_n - 25000.$

Ainsi: $(1) \iff K_{n+1} = (1,02\,[K_n - 25000] + 500) + 25000$

$\Rightarrow K_{n+1} = 1,02\,K_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$

Par conséquent, (K_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $K_0 = 30000$ €.

4. a. Déduisons-en l'expression de K_n, en fonction de n:

Comme $K_{n+1} = 1,02\,K_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$K_n = K_0 \times (1,02)^n$, avec: $K_0 = 30000$ €, cad: $K_n = 30000 \times (1,02)^n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$

4. b. Déduisons-en l'expression de I_n, en fonction de n:

Nous savons que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$: * $K_n = 30000 \times (1,02)^n$

* $I_n = K_n - 25000.$

D'où: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = 30000 \times (1,02)^n - 25000.$

5. a. Justifions que la suite (I_n) tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} 30000 \times (1,02)^n - 25000$$

$$= +\infty \quad \text{car:} \quad \lim_{n\to+\infty} (1,02)^n = +\infty, \quad \text{car:} \quad 1,02 > 1.$$

Au total: $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$ et donc la suite (I_n) est **divergente**.

5. b. Écrivons l'algorithme demandé:

L'algorithme demandé est:

Initialisation:	Affecter à K la valeur 20000
	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à I la valeur 5000
Traitement:	Tant que I < K
	Affecter à n la valeur n + 1
	Affecter à I la valeur 1,02 x I + 500
	Fin du Tant que
Affichage:	Afficher 2016 + n

5. c. Déterminons l'année recherchée:

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $I_n > 20000.$

$$I_n > 20000 \iff 30000 \times (1,02)^n - 25000 > 20000$$

$$\iff (1,02)^n > 1,5$$

$$\iff n \ln(1,02) > \ln(1,5)$$

$$\iff n > \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,02)},$$ car: $1,02 > 1$, et donc: $\ln(1,02) > 0$

$$\Rightarrow n > 20,47$$

$$\Rightarrow n \geqslant 21$$ ans car n est un entier naturel.

Ainsi, au bout de **21 ans** cad en **2037**, le solde de l'assurance sera strictement supérieur à 20000 €.

Partie B:

1. a. Calculons $f(1)$:

$$f(1) = \frac{30 \times 1 - 16}{15 \times 1 - 2} \Rightarrow f(1) = \frac{14}{13}.$$

Ainsi: $f(1) = \dfrac{14}{13}.$

1. b. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{30x - 16}{15x - 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{30x}{15x}$$ (= lim en $+\infty$ des termes de plus haut degré)

$$= 2.$$

Au total: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

1. c. Que peut-on déduire quant à la courbe représentative de f ?

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, nous pouvons affirmer que: la courbe $\mathcal{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

2. Calculons f', pour tout $x \geq 1$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{30x - 16}{15x - 2}$

• $Df = [\ 1 ; +\infty\ [$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = 30x - 16$ et $f_2(x) = 15x - 2$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Dans ces conditions, $\dfrac{f_1}{f_2}$ est dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$ comme quotient $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)$ de deux fonctions dérivables sur $[\ 1 ; +\infty\ [$, avec: pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$, $f_2(x) \neq 0$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$.

Pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$: $f'(x) = \dfrac{30 \times (15x - 2) - 15\,(30x - 16)}{(15x - 2)^2}$

$$\iff f'(x) = \frac{450x - 60 - (450x - 240)}{(15x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{180}{(15x - 2)^2}.$$

Au total: pour tout x ,$\in [\ 1 ; +\infty\ [$, $f'(x) = \dfrac{180}{(15x - 2)^2}$.

3. Dressons le tableau de variation de f pour $x \geqslant 1$:

Pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$: $f'(x) = \dfrac{180}{(15x - 2)^2} > 0$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

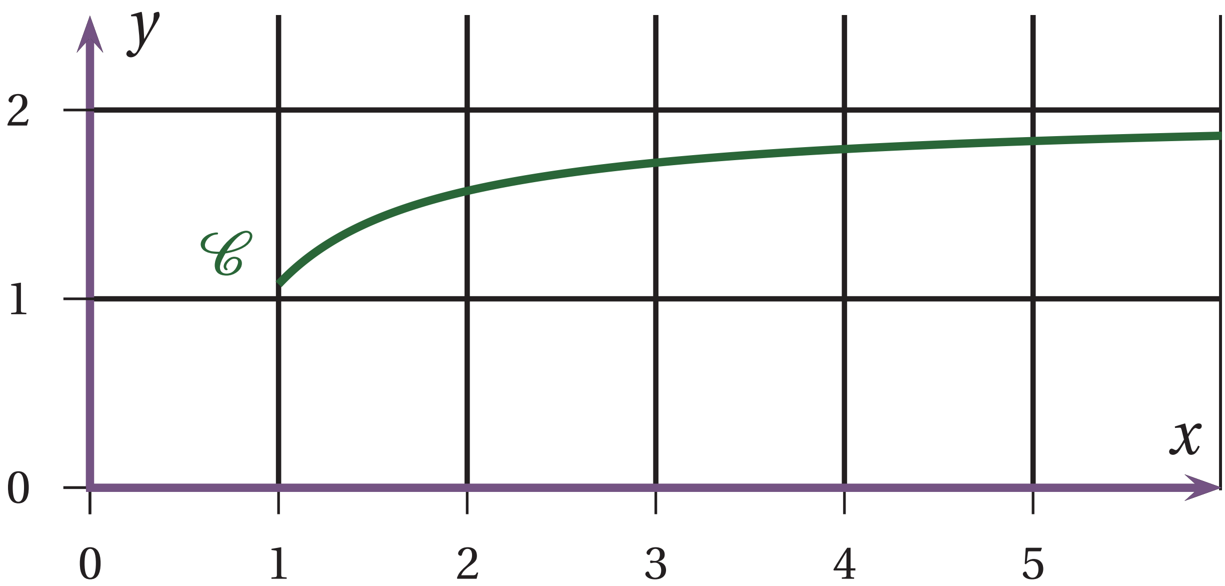
Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	1		$+\infty$
f'		$+$	
f	a	$\nearrow$	b

Avec: • $a = f(1) \Rightarrow a = \dfrac{14}{13}$,

• $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow b = 2$.

4. Représentons la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal:



Partie C:

1. **Montrons par récurrence que $\forall$ n $\in$ IN, $1 \leqslant U_n \leqslant 2$:**

Nous allons montrer par récurrence que: " $\forall$ n $\in$ IN: $1 \leqslant U_n \leqslant 2$ ".

Initialisation: • $U_0 = 1$ et $1 \leqslant 1 \leqslant 2$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = \dfrac{30 \times 1 - 16}{15 \times 1 - 2}$ cad: $U_1 = \dfrac{14}{13}$ et $1 \leqslant \dfrac{14}{13} \leqslant 2$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit n $\in$ IN, supposons $1 \leqslant U_n \leqslant 2$ et montrons qu'alors:

$$1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 2, \text{ avec: } U_{n+1} = \frac{30\,U_n - 16}{15\,U_n - 2}.$$

Supposons: $1 \leqslant U_n \leqslant 2$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) $\iff 1 \leqslant U_n \leqslant 2$

$\implies f(1) \leqslant f(U_n) \leqslant f(2)$,

car: la fonction f est strictement croissante sur $[\,1; +\infty\,[$ et $U_n \geqslant 1$,

$$\implies \frac{14}{13} \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{30 \times 2 - 16}{15 \times 2 - 2}$$

$$\implies \frac{14}{13} \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{44}{28}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leqslant \frac{14}{13} \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{44}{28} \leqslant 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 2, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Conclusion: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, nous avons: $1 \leqslant U_n \leqslant 2$.

2. a. Expliquons pourquoi la suite (V_n) est bien définie:

La suite (V_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ssi: $15\,U_n - 12 \neq 0$.

$15\,U_n - 12 \neq 0$ ssi: $U_n \neq \frac{4}{5} < 1$.

Or, c'est toujours vérifié car: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant 1$.

Au total: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la suite (V_n) est bien définie.

2. b. b1. Calculons V_0, V_1 et V_2:

Après calculs, nous obtenons: $V_0 = \frac{-5}{3}$, $V_1 = \frac{-25}{27}$ et $V_2 = \frac{-125}{243}$.

2. b. b2. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de premier terme $\frac{-5}{3}$ et de raison $\frac{5}{9}$:

• (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{9}$ ssi: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \frac{5}{9} \times V_n$.

Or: $V_{n+1} = \dfrac{15\,U_{n+1} - 20}{15\,U_{n+1} - 12}$, avec: $U_{n+1} = \dfrac{30\,U_n - 16}{15\,U_n - 2}$.

Dans ces conditions: $V_{n+1} = \dots \Rightarrow V_{n+1} = \frac{5}{9}\left[\dfrac{15\,U_n - 20}{15\,U_n - 12}\right]$

$$\Rightarrow \quad V_{n+1} = \frac{5}{9} \times V_n \,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

• De plus: $V_0 = \dfrac{15\,U_0 - 20}{15\,U_0 - 12} \iff V_0 = \dfrac{15 \times 1 - 20}{15 \times 1 - 12} \Rightarrow V_0 = \dfrac{-5}{3}.$

Au total: (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{9}$ et de premier terme $V_0 = \dfrac{-5}{3}$.

2. c. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = \dfrac{5}{9}\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$, avec: $V_0 = \dfrac{-5}{3}$, cad: $V_n = \dfrac{-5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. d. d1. Donnons l'expression de U_n en fonction de V_n:

Nous savons que: $V_n = \dfrac{15\,U_n - 20}{15\,U_n - 12} \iff V_n \times (15\,U_n - 12) = 15\,U_n - 20$

$$\iff 15\,U_n\,V_n - 12\,V_n = 15\,U_n - 20$$

$$\iff U_n \times (15\,V_n - 15) = 12\,V_n - 20$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{12\,V_n - 20}{15\,V_n - 15}.$$

Dans ces conditions: $U_n = \dfrac{12\left(\dfrac{-5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n\right) - 20}{15\left(\dfrac{-5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n\right) - 15}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. d. d2. Démontrons que $U_n = \dfrac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}$:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}: \quad U_n = \frac{12\left(\dfrac{-5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n\right) - 20}{15\left(\dfrac{-5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n\right) - 15}$$

$$= \frac{-20 \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n - 20}{-25 \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n - 15}$$

$$= \frac{4 \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n + 4}{5 \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n + 3}$$

$$\Rightarrow \quad U_n = \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n},\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Au total: $\forall\ n \in \mathbb{N},\ U_n = \dfrac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}$.

2. e. e1. Etablissons l'algorithme demandé:

Le taux de variation du produit financier est: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} - 1$.

Notons: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \dfrac{W_n}{U_n} - 1$.

L'algorithme demandé est:

Initialisation:	Affecter à U la valeur 1
	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à W la valeur $\frac{14}{13}$
Traitement:	Tant que $\frac{W}{U} - 1 > 0,02$, Faire:
	n prend la valeur $n + 1$
	U prend la valeur $\frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}$
	W prend la valeur $\frac{30\,U - 16}{15\,U - 2}$
	Fin du Tant que
Affichage:	Afficher $2016 + n$

2. e. e2. Déterminons l'année recherchée:

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 < 0,02$.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 < 0,02 \iff \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1,02$$

$$\iff \frac{\frac{30\,U_n - 16}{15\,U_n - 2}}{U_n} < 1,02$$

$$\iff \frac{30\,U_n - 16}{15\,U_n - 2} < 1,02\,U_n$$

$$\iff 30\,U_n - 16 < 15,3\,U_n^2 - 2,04\,U_n$$

$$\iff 15,3\,U_n^2 - 32,04\,U_n + 16 > 0. \quad (1)$$

Soit l'équation: $15,3x^2 - 32,04x + 16 = 0$. $(U_n = x)$

$\Delta = 47,3616 > 0$, d'où 2 solutions dans $\mathbb{R}$.

$$x' = \frac{32,04 - \sqrt{47,3616}}{30,6} \approx 0,822 \notin [\,1\,;\,2\,]$$, donc à rejeter,

$$x'' = \frac{32,04 + \sqrt{47,3616}}{30,6} \approx 1,27 \in [\,1\,;\,2\,]$$, à retenir.

Par conséquent, nous retiendrons: $x \approx 1,27$.

Ainsi: si $U_n \in \,]\,1,27\,;\,2\,]$, l'inéquation (1) est vérifiée.

Dans ces conditions, la première année " **n** " pour laquelle le taux de variation du produit financier sera inférieur à 2% est telle que: $U_n \approx 1,27$.

$$U_n \approx 1,27 \iff \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n} \approx 1,27$$

$$\iff 4 \times 5^n + 4 \times 9^n \approx 1,27 \times (5 \times 5^n + 3 \times 9^n)$$

$$\iff (4 - 3 \times 1,27) \times 9^n \approx (1,27 \times 5 - 4) \times 5^n$$

$$\iff \left(\frac{9}{5}\right)^n \approx \frac{1,27 \times 5 - 4}{4 - 3 \times 1,27}$$

$$\iff n \times \ln\left(\frac{9}{5}\right) \approx \ln\left(\frac{2,35}{0,19}\right)$$

$$\Rightarrow n \approx 4,28 \text{ ans}$$

$$\Rightarrow n = 5 \text{ ans car } n \text{ est un entier naturel.}$$

Ainsi, au bout de **5 ans** cad en **2021**, le taux de variation du produit financier sera inférieur à 2%.

EXERCICE: Vrai ou Faux ? (8 points)

1. C'est vrai.

Soit G la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

Les valeurs que peut prendre la v. a. G sont: $\{-2, 1, 3\}$.

- $P(G = -2) = P$ (obtenir le chiffre " 2 ") $+ P$ (obtenir le chiffre " 3 ")

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

- $P(G = 1) = P$ (obtenir le chiffre " 1 ")

$$= \frac{1}{4}.$$

- $P(G = 3) = P$ (obtenir le chiffre " 4 ")

$$= \frac{1}{4}.$$

D'où la loi de probabilité de la v. a. G est:

$G = x_i$	-2 €	1 €	3 €
$P(G = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Nous pouvons remarquer que: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$

Dans ces conditions: $E(G) = \left(-2 \times \frac{1}{2}\right) + \left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(3 \times \frac{1}{4}\right)$

cad: $E(G) = 0$ €.

Donc l'affirmation est vraie.

2. C'est vrai.

Soit l'événement F = " les 2 chaussettes sont de la même couleur ".

L'événement F = [(chaussette verte au 1^{er} tirage) ∩ (chaussette verte au 2^e tirage)] ∪ [(chaussette bleue au 1^{er} tirage) ∩ (chaussette bleue au 2^e tirage)].

D'où: P (F) = [P (chaussette verte au 1^{er} tirage) x P (chaussette verte au 2^e tirage)] + [P (chaussette bleue au 1^{er} tirage) x P (chaussette bleue au 2^e tirage)].

Ainsi: $P(F) = \left[\frac{15}{20} \times \frac{14}{19}\right] + \left[\frac{5}{20} \times \frac{4}{19}\right] \Rightarrow P(F) \approx 0,605$.

Donc l'affirmation est vraie.

3. C'est faux.

Soient les événements: C = " l'assiette est cassée ", et $\overline{C}$ = " l'assiette n'est pas cassée ".

On désigne par X le nombre d'assiettes cassées sur 100 assiettes prises au hasard.

Nous sommes en présence de 100 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de C suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 100$ et $p = 4\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(100; 4\%)$.

En fait, on répète 100 fois un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, il s'agit de calculer: $P(X \leqslant 1)$.

Or: $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{100}{0}(4\%)^0 (96\%)^{100} + \binom{100}{1}(4\%)^1 (96\%)^{99}$$

$$= (96\%)^{100} + \binom{100}{1} \times 4\% \times (96\%)^{99}$$

$$\Rightarrow \; P(X \leqslant 1) \approx 0,087.$$

Au total, la probabilité demandée est d'environ: $8,7\% < 10\%$.

Donc l'affirmation est fausse.

4. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons montrer que sur $\mathbb{R}$: l'équation de la fonction exponentielle est supérieure à celle de la droite (D), tangente à la courbe (C) au point point $x = 0$.

- **L'équation de la fonction exponentielle est: $y = e^x, \forall \, x \in \mathbb{R}$.**
- L'équation de la droite (D) est: $y = x + 1, \forall \, x \in \mathbb{R}$.

Dans ces conditions, a-t-on: $\forall \, x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$?

$\forall \, x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1 \iff e^x - x - 1 \geqslant 0$.

Soit: $f(x) = e^x - x - 1, \forall \, x \in \mathbb{R}$.

Posons: $f = f_1 + f_2$, avec: $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = -x - 1$.

f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ".

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " polynôme ".

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme $(f_1 + f_2)$ de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - 1 \iff f'(x) = e^x - e^0$.

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f	$-\infty$	↘	a	↗	$+\infty$

Avec: $a = f(0) \Rightarrow a = e^0 - 0 - 1$ cad: $\boldsymbol{a = 0}$.

Au total: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$, " 0 " étant le minimum de f

$\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x - x - 1 \geq 0$

$\iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$. **(CQFD)**

Donc l'affirmation est vraie.

5. **C'est vrai.**

En effet: • l'équation de (d') est: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$,

• le coefficient directeur de (d') est alors: $\frac{1}{2}$,

• (d) a ainsi pour équation: $y - y_A = \frac{1}{2}(x - x_A)$

$$\Leftrightarrow \; y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \; y = \frac{1}{2}x + 0.$$

Donc l'affirmation est vraie.

6. C'est faux.

En effet, f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

Erreur volontaire ou involontaire dans l'énoncé, donc on exploite!

Donc l'affirmation est fausse.

7. C'est vrai.

En effet, ici: $A(1; 3)$, $B(6; 4)$ et $C(7; -1)$.

Dans ces conditions: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$,

• $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} \Rightarrow AB = \sqrt{26}$,

• $AC = \sqrt{6^2 + (-4)^2} \Rightarrow AC = \sqrt{52}$,

• $BC = \sqrt{1^2 + (-5)^2} \Rightarrow BC = \sqrt{26}$.

D'où: $AC^2 = AB^2 + BC^2$,

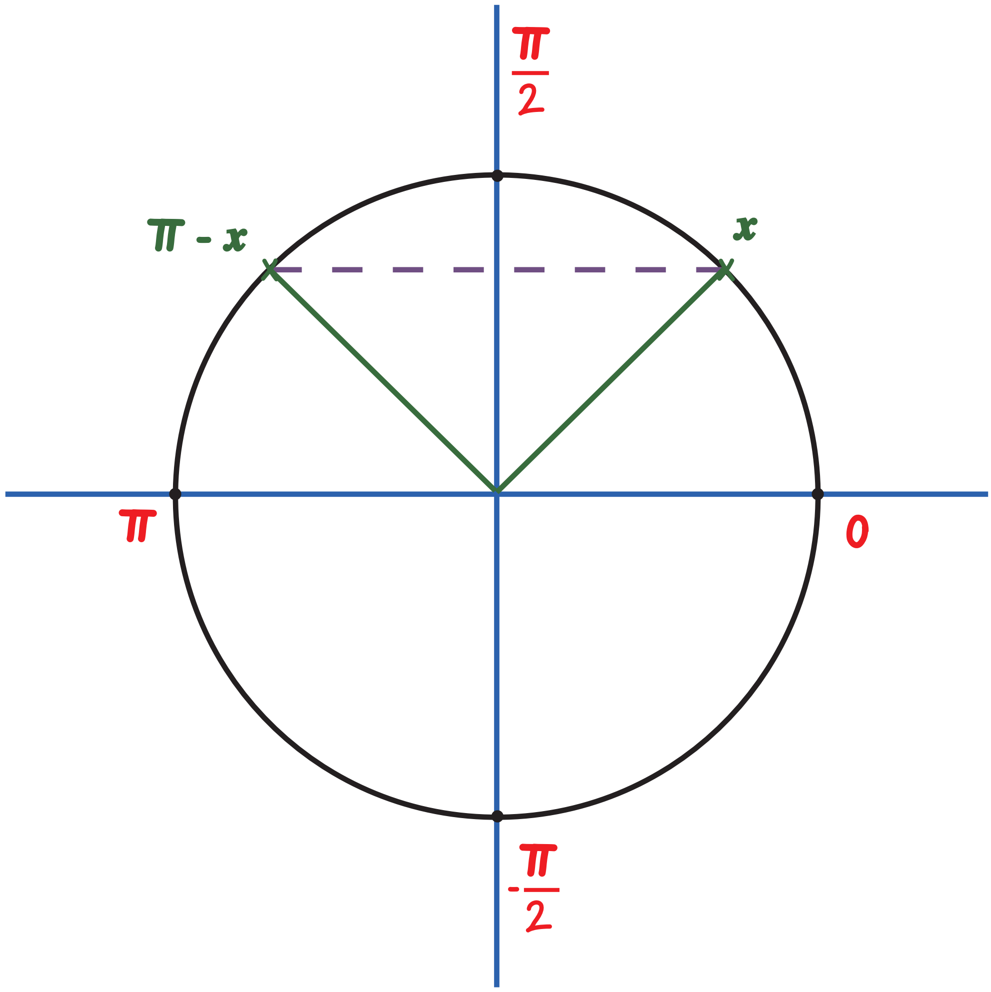
et: le triangle ABC est isocèle en B.

Donc, d'après la réciproque du théorème de **Pythagore**:

le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

8. C'est vrai.

En effet, faisons une représentation du cercle trigonométrique pour justifier:



Nous remarquons que l'ordonnée du point d'abscisse x est identique à celle du point d'abscisse $\pi - x$.

Donc, nous avons bien: $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - x) = \sin x$.

Donc l'affirmation est vraie.

9. C'est faux.

D'après le cours sur les **suites**:

- " Toute suite croissante et majorée est convergente ".

• " Toute suite décroissante et minorée est convergente ".

Donc l'affirmation est fausse.

10. C'est faux.

Pour le justifier, il suffit de prendre la fonction $f(x) = \frac{30x - 16}{15x - 2}$ de **Partie B**.

Cette fonction est positive et croissante, et pourtant:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \neq +\infty.$$

Donc l'affirmation est fausse.