ÉPREUVE MATHÉMATIQUES
SciencesPo - Paris, 2018

CORRIGÉ - freemaths.fr

Pour s'entraîner :

▸ **Problème :**
- Analyse I, 2e édition - Alain Piller
- Fonctions, Intégrales, T. S - freemaths.fr

▸ **Exercice :**

▸ Thème sur freemaths.fr (**selon la question**)

• Suites, T. S	[Q. 1, Q. 4, Q. 5 et Q. 6]
• Fonctions, Intégrales, T. S	[Q. 7, Q. 8 et Q. 9]
• Probabilités Discrètes, T. S	[Q. 2 et Q. 3]
• Probabilités Discrètes, T. ES	[Q. 2 et Q. 3]
• Géométrie dans l'Espace, T. S	[Q. 10]

PROBLÈME (8 points)

[Analyse I, 2e édition - Alain Piller
freemaths.fr : Fonctions, Intégrales, T. S et T. ES]

Partie A :

1. Montrons que pour tout x strictement positif, $f'(x) = 2ax - \frac{2b}{x^3} - \frac{2\ln(x)}{x}$:

Ici : • $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2} - (\ln(x))^2$

• $Df =]\,0\,;+\infty\,[$.

Posons : $f = f_1 + f_2 + f_3$, avec : $f_1(x) = ax^2$, $f_2(x) = \frac{b}{x^2}$ et $f_3(x) = -(\ln(x))^2$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

f_2 est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, avec pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$: $x^2 \neq 0$.

f_3 est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ car la fonction " ln " est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Donc, f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme somme $(f_1 + f_2 + f_3)$ de 3 fonctions dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$: • $f'_1(x) = 2ax$

• $f'_2(x) = \frac{-2b}{x^3}$

• $f'_3(x) = -2 \times (\ln(x)) \times \frac{1}{x}$ cad: $f'_3(x) = \frac{-2\ln(x)}{x}$.

D'où pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = 2ax - \frac{2b}{x^3} - \frac{2\ln(x)}{x}$.

2. Déterminons les réels a et b:

D'après l'énoncé: • Cf passe par le point A (1 ; 0,5),

donc: $f(1) = 0,5$,

• Cf admet une tangente horizontale au point A,

donc: $f'(1) = 0$.

Nous avons donc le système suivant:

$$\begin{cases} f(1) = 0,5 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0,5 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0,5 \\ a = b \end{cases}.$$

D'où: $a = 0,25$ **et** $b = 0,25$.

Ainsi, les réels a et b ont pour valeurs: $a = \frac{1}{4}$ **et** $b = \frac{1}{4}$.

Nous pouvons alors écrire, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

• $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2$

• $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^3} - \frac{2\ln(x)}{x}$.

Partie B:

1. a. Factorisons l'expression $2X^2 - 4X + 2$:

$2X^2 - 4X + 2 = 2(X^2 - 2X + 1)$

$= 2(X - 1)^2.$

Ainsi: $2X^2 - 4X + 2 = 2(X - 1)^2.$

1. b. Déduisons-en une factorisation de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$:

Posons: $X = x^2$.

D'où: $2X^2 - 4X + 2 = 2x^4 - 4x^2 + 2$.

Dans ces conditions, comme $2X^2 - 4X + 2 = 2(X - 1)^2$, une factorisation de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ s'écrit:

$$2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Notons qu'on aurait pu aussi écrire: $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2[(x - 1)(x + 1)]^2$

$= 2(x - 1)^2(x + 1)^2.$

2. Déterminons le signe de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ en fonction de x:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous savons que: $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2$.

Ainsi le signe de l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ dépend du signe de $(x^2 - 1)^2$.

Distinguons 2 cas:

- pour $x = 1$ et $x = -1$, $(x^2 - 1)^2 = 0$,
- pour $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$, $(x^2 - 1)^2 > 0$.

Donc, pour tout nombre réel x : $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2 \geqslant 0$.

Partie C:

1. Déterminons le sens de variation de la fonction g sur $]0; +\infty[$:

Ici: • $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln(x)$

• $Dg =]0; +\infty[$.

Etape 1: **détermination de g' pour tout $x \in]0; +\infty[$**

Posons: $g = g_1 + g_2 + g_3$, avec: $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $g_3(x) = -4\ln(x)$.

g_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $]0; +\infty[$.

g_2 est dérivable sur $]0; +\infty[$, avec pour tout $x \in]0; +\infty[$: $x^2 \neq 0$.

g_3 est dérivable sur $]0; +\infty[$ car la fonction " ln " est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Donc, g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme $(g_1 + g_2 + g_3)$ de 3 fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: • $g'_1(x) = 2x$

• $g'_2(x) = \frac{2}{x^3}$

• $g'_3(x) = -\frac{4}{x}$.

D'où pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x}$.

Etape 2: **détermination du signe de g' pour tout $x \in]0; +\infty[$**

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x}$.

En réduisant au même dénominateur, nous obtenons, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{2x^4 + 2 - 4x^2}{x^3} \quad \text{cad:} \quad g'(x) = \frac{2x^4 - 4x^2 + 2}{x^3}.$$

Or, d'après Partie B:
- $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2$
- $2(x^2 - 1)^2 \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc ici, pour tout $x \in]0;+\infty[$ nous pouvons affirmer que:

- $x^3 > 0$
- $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)^2}{x^3} \geq 0$.

Comme, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) \geq 0$: la fonction g est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. a. Calculons $g(1)$:

Nous avons: $g(1) = (1)^2 - \frac{1}{(1)^2} - 4\ln(1)$ cad: $g(1) = 0$.

2. b. Déduisons-en le signe de la fonction g sur $]0;+\infty[$:

$g(1) = 0$, donc sur $]0;+\infty[$, nous allons distinguer 2 cas:

- si $x \in]0;1]$, alors: $g(x) \leq g(1) = 0$
  (car la fonction g est croissante sur $]0;1]$),
- si $x \in]1;+\infty[$, alors: $g(x) \geq g(1) = 0$
  (car la fonction g est croissante sur $]1;+\infty[$).

Donc: • g est négative sur $]0\,;1]$,

• g est positive sur $]1\,;+\infty[$.

Partie D:

1. Montrons que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$:

Ici: • $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2$

• $D_f =]0\,;+\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right) - (-\ln(x))^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{4} \times x^2\right) - (\ln(x))^2.$$

Au total, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, nous avons: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (\ln(x))^2$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2.$$

Et donc: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

2. a. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln(x))^2$

$$= x^2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \frac{(\ln(x))^2}{x^2}\right].$$

Or: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2$

$= 0$, d'après le Théorème des Croissances comparées,

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4x^4} = 0.$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \frac{(\ln(x))^2}{x^2}\right]$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[\frac{1}{4} + 0 - 0\right]$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4}.$$

Au total, la limite de f en $+\infty$ est: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4}$

$$= +\infty.$$

2. b. Déterminons la limite de f en 0^+:

Nous savons que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$

Posons: $X = \dfrac{1}{x}$, avec: $x \in]\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions: • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} X = +\infty$,

• $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(X)$.

Donc: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} f(X)$.

Or: $\lim\limits_{X \to +\infty} f(X) = +\infty$, d'après a.

Donc, la limite de f en zéro est: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

3. a. Montrons que pour tout réel $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2x}\, g(x)$:

D'après **Partie A 1.**, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = 2ax - \dfrac{2b}{x^3} - 2\,\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Or: $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$.

D'où, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2x^3} - \dfrac{2\ln(x)}{x}$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$$f'(x) = \frac{1}{2x}\left[x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2x} \times g(x), \text{ car: } \quad g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln(x).$$

Au total, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{1}{2x}\, g(x)$.

3. b. Déduisons-en le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$:

Nous venons de montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{2x}\, g(x)$.

Or sur $]0; +\infty[$: $\dfrac{1}{2x} > 0$.

Donc: le signe de f' est le même que celui de g, sur $]0; +\infty[$.

Or, d'après Partie C 2. b.:
- g est négative sur $]0; 1]$,
- g est positive sur $]1; +\infty[$.

Ainsi:
- f' est négative sur $]0; 1]$,
- f' est positive sur $]1; +\infty[$.

Et donc:
- f est décroissante sur $]0; 1]$,
- f est croissante sur $]1; +\infty[$.

Partie E:

1. Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$:

Posons, pour tout $x \in]0; 1]$: $h(x) = f(x) - x$.

La question revient donc à montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; 1]$.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici:

- h est continue sur $]0; 1]$ comme différence $(f(x) - x)$ de deux fonctions continues sur $]0; 1]$.

- " $k = 0$ " est compris entre: $h(1) = -\dfrac{1}{2} < 0$

et: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty$.

- h est strictement décroissante sur $]0; 1]$ car pour tout $x \in]0; 1]$:

$$h'(x) = f'(x) - 1 \quad \text{cad:} \quad h'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^3} - \frac{2\ln(x)}{x} - 1 < 0,$$

(f' est négative sur $]0; 1]$ d'après Partie D 3. b.)

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) - x = 0$ ($k = 0$) admet une unique solution α appartenant à $]0; 1]$, et plus exactement sur $]0; 1[$.

Au total: $h(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $]0; 1]$.

2. Montrons que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique solution β sur $]1; +\infty[$:

D'après **Partie D 1.**, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'où, pour tout $x \in]1; +\infty[$, nous avons: $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x} \iff f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$.

Posons: $X = \frac{1}{x}$, avec: $x \in]1; +\infty[$.

D'où: $X \in \left]\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right); \frac{1}{1}\right[=]0; 1[$.

Donc: $f(x) = \frac{1}{x} \iff f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \iff f(X) = X$, avec: $X \in]0; 1[$.

Ainsi, d'après la question précédente, nous pouvons affirmer que l'équation $f(X) = X$ (ou: $f(X) - X = 0$) sur $]0; 1[$ admet une unique solution α.

Et nous avons: $X = \alpha \iff \frac{1}{x} = \alpha \iff x = \frac{1}{\alpha} = \beta$.

Au total, l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet bien une unique solution β sur $]1; +\infty[$:

$$\beta = \frac{1}{\alpha}.$$

3. Montrons que $\alpha \times \beta = 1$:

Comme nous l'avons vu à la question précédente: $\beta = \frac{1}{\alpha}$.

D'où: $\alpha \times \beta = 1$.

4. a. Écrivons un algorithme permettant d'afficher un encadrement de α à 10^{-2} près:

L'algorithme demandé est:

```
0,1 → a
1 → b
while  b - a > 0,01
    if  h((a+b)/2) > 0
        then  (a+b)/2 → a
        else  (a+b)/2 → b
    end if
end while
Afficher (a, b)
```

4. b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}:

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est: $0,54 < \alpha < 0,55$.

EXERCICE: Vrai ou Faux ? (12 points)

1. C'est faux.

Soient: • C_i, le capital initial

• C_f, le capital final **cad**: au bout de 20 ans

• r, le taux d'intérêt annuel = **3%**

• n, le nombre d'années = **20 ans**.

Nous avons: $C_f = (1 + r)^n \, C_i$

$= (1,03)^{20} \, C_i$

$\approx 1,806 \, C_i$.

Ainsi: le capital initial placé sera multiplié par environ 1, 806 au bout de 20 ans.

Comme: $1,806 < 2$, la somme totale disponible au bout de 20 ans ne sera pas supérieure ou égale au double du capital placé.

Donc l'affirmation est fausse.

2. C'est vrai.

Soit N la variable aléatoire égale au **nombre de numéros différents obtenus,** après trois tirages successifs avec remise.

Les boules sont numérotées: 1, 2 et 3.

Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N sont: $\{ 0, 2, 3 \}$*.

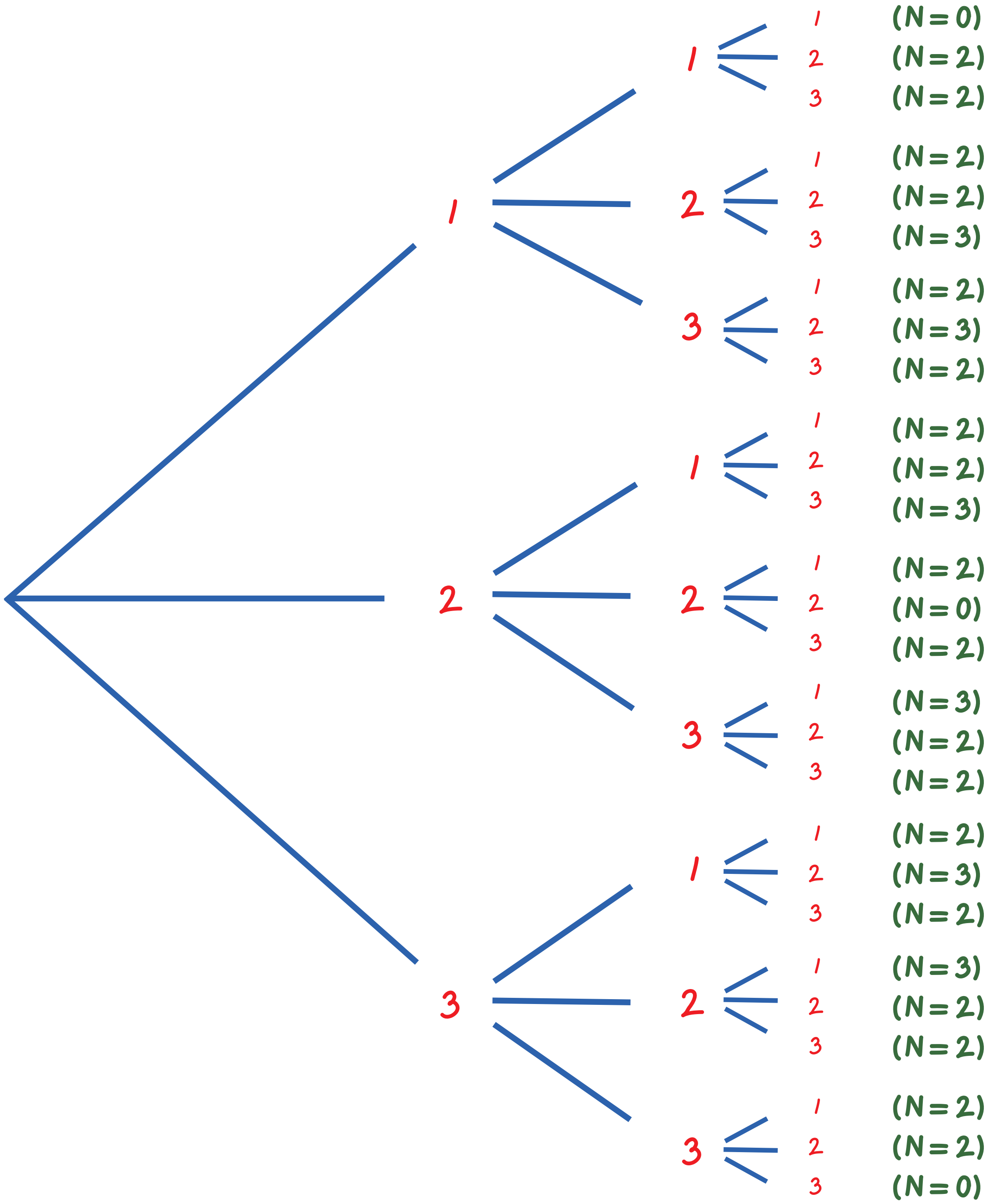
*: en effet: • soit les 3 boules ont le même numéro et donc $N = 0$,

- soit il y a 2 boules avec le même numéro et une 3^e^ avec un numéro différent et donc $N = 2$,

- soit les 3 boules ont des numéros différents et donc $N = 3$.

Notons que:
- $N = 0$ signifie 0 numéro différent sur les 3 boules,
- $N = 2$ signifie 2 numéros différents sur les 3 boules,
- $N = 3$ signifie 3 numéros différents sur les 3 boules.

Construisons un arbre:



D'où: • $P(N=0) = 3 \times \frac{1}{27}$ => $P(N=0) = \frac{3}{27}$.

• $P(N=2) = 18 \times \frac{1}{27}$ => $P(N=2) = \frac{18}{27}$.

• $P(N=3) = 6 \times \frac{1}{27}$ => $P(N=3) = \frac{6}{27}$.

Dans ces conditions, la loi de probabilité de la variable aléatoire N est:

$N = n_i$	0	2	3
$P(N = n_i)$	$\frac{3}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$

Nous pouvons remarquer que: $\frac{3}{27} + \frac{18}{27} + \frac{6}{27} = 1$.

Nous avons donc: $E(N) = \left(0 \times \frac{3}{27}\right) + \left(2 \times \frac{18}{27}\right) + \left(3 \times \frac{6}{27}\right)$

cad: $E(N) = 2$.

Ainsi: **l'espérance de N est égale à 2.**

Comme: $2 > \frac{3}{2}$, l'espérance de N est strictement supérieure à $\frac{3}{2}$.

Donc l'affirmation est vraie.

3. **C'est faux.**

Soient les événements: $C =$ " conforme ", et $\overline{C} =$ " non conforme ".

On désigne par X le nombre de véhicules non conformes sur un lot de 100 véhicules prélevé au hasard.

Nous sommes en présence de 100 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de $\overline{C}$ suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 100$ et $p = 3\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(100\,;\,3\%)$.

En fait, on répète 100 fois un schéma de Bernoulli.

Ici, il s'agit de calculer: $P\,(X = 0)$.

(aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux)

$$P\,(X = 0) = \binom{100}{0}\,(3\%)^0\,(1 - 3\%)^{100}$$

$$= (1 - 3\%)^{100} \neq 1 - (3\%)^{100}.$$

Comme: $(1 - 3\%)^{100} \neq 1 - (3\%)^{100}$, la probabilité qu'aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux n'est pas égale à $1 - 0,03^{100}$.

Donc l'affirmation est fausse.

4. C'est vrai.

4. a. En ce qui concerne la suite (U_n):

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 2 + (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n)$

$$= 2 + \left[\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 1\right], \text{ car: } \quad 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= 2 + [\,2^{n+1} - 1 - 1\,]$$

$$= 2^{n+1}$$

$= 4 \times (2)^{n-1}.$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = U_1 \times (q)^{n-1}$, avec $U_1 = 4$ et $q = 2$.

Ainsi: la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $U_1 = 4$.

4. b. En ce qui concerne la suite (V_n):

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = U_n - 1$.

Dans ces conditions:
- $V_1 = U_1 - 1 = 3$, $(U_1 = 4)$
- $V_2 = U_2 - 1 = 7$, $(U_2 = 8)$
- $V_3 = U_3 - 1 = 15$. $(U_3 = 16)$

Or: $\dfrac{V_1}{V_2} \neq \dfrac{V_2}{V_3}$ car $\dfrac{3}{7} \neq \dfrac{7}{15}$.

Ainsi: la suite (V_n) n'est pas une suite géométrique.

Donc l'affirmation est vraie.

5. C'est vrai.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel ℓ tel que: $\lim\limits_{n \to +\infty} n \cdot U_n = \ell$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot U_n = \ell \iff \lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ell}{n}.$$

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{P}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Ainsi: oui, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Donc l'affirmation est vraie.

6. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons avoir recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = n + 1$ ".

Initialisation: $U_1 = 10 \times U_0 - 9 \times 0 - 8$ (car: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 10\,U_n - 9n - 8$)

$= 10 \times 1 - 9 \times 0 - 8$, car: $U_0 = 1$, d'après l'énoncé.

D'où: $U_1 = 2$.

Et: $U_1 = 1 + 1 = 2$, car: $U_n = n + 1$.

Donc **vrai au rang " 1 "**.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n = n + 1$

et montrons qu'alors: $U_{n+1} = (n+1) + 1$.

Supposons: $U_n = n + 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$(1) \Rightarrow 10\,U_n = 10\,n + 10$

$\Rightarrow 10\,U_n - 9\,n = 10\,n + 10 - 9\,n$

$\Rightarrow 10\,U_n - 9\,n - 8 = 10\,n + 10 - 9\,n - 8$

$\Rightarrow 10\,U_n - 9\,n - 8 = n + 2$

$\Rightarrow 10\,U_n - 9\,n - 8 = (n + 1) + 1$

$\Rightarrow U_{n+1} = (n + 1) + 1$ (car: $U_{n+1} = 10\,U_n - 9\,U_n - 8$).

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons bien: $U_n = n + 1$.

Donc l'affirmation est vraie.

7. C'est faux.

Pour le justifier, nous allons prendre un contre exemple.

Soient f et g, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme suit:

- $f(x) = 3x + 7$
- $g(x) = 3x$.

Nous avons:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,
- pour tout réel x: $f(x) > g(x)$ (car: $7 > 0$)

Or, pour tout réel x: $f(x) - g(x) = 7$.

Et donc: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 7$.

Comme $7 \neq +\infty$, pour tout réel x: $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) \neq +\infty$.

Donc l'affirmation est fausse.

8. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons calculer d'une part $f(2x)$, d'autre part $\dfrac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$ et comparer les deux résultats obtenus.

Calcul de $f(2x)$:

$\forall\, x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, d'après l'énoncé.

Dans ces conditions: $f(2x) = \dfrac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Calcul de $\dfrac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$:

$\forall\, x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, d'après l'énoncé.

Dans ces conditions: $$\frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2} = \frac{2\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)}{1 + \left[\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right]^2}$$

$$= \frac{\dfrac{2(e^{2x} - 1)}{e^{2x} + 1}}{\dfrac{(e^{2x} + 1)^2 + (e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2}}$$

$$= \frac{2\,(e^{2x}-1)\,(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2+(e^{2x}-1)^2}$$

$$= \frac{2\,(e^{2x}-1)\,(e^{2x}+1)}{2\,(e^{4x}+1)}$$

$$= \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1} \quad ((a-b)\,(a+b)=a^2-b^2).$$

D'où: $\dfrac{2\,f(x)}{1+(f(x))^2} = \dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Comme $f(2x) = \dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $f(2x) = \dfrac{2\,f(x)}{1+(f(x))^2}$.

Donc l'affirmation est vraie.

9. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons utiliser la formule: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Ici: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \cos^2\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1$

$$\iff \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$\iff \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{8+2\sqrt{12}}{16}\right)$$

$$\iff \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{8-2\sqrt{12}}{16}$$

$$\iff \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < 0$$

$$\text{ou:} \quad \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} > 0.$$

Comme, d'après le cercle trigonométrique: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$, nous retiendrons uniquement la solution $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < 0.$

Donc l'affirmation est vraie.

10. C'est vrai.

Pour le justifier, nous allons procéder en 3 étapes.

Étape 1: détermination des coordonnées du point B.

Le point A a pour coordonnées: **$A\,(a\,;\,a^2)$**, **avec: $a > 0$.**

Soit le point B, avec $B\,(x\,;\,y)$.

D'après l'énoncé: **" B est le point d'intersection entre la parabole et la perpendiculaire à la droite (OA) passant par O ".**

Dans ces conditions: **les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux.**

Or: $A\,(a;\,a^2)$ et $B\,(x\,;\,y)$, **avec: $y = x^2$ car B appartient à la parabole.**

D'où: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux ssi: $OA \cdot OB = 0$.

Ici: $OA \cdot OB = 0$ <=> $(a \cdot x) + (a^2 \cdot x^2) = 0$

<=> $a \cdot x\,(1 + a \cdot x) = 0$

<=> $1 + a \cdot x = 0$, **car**: $a \cdot x \neq 0$

<=> $x = -\dfrac{1}{a}$.

D'où les coordonnées du point B sont: $B\left(-\dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{a^2}\right)$, **avec**: $a > 0$ **et** $y = x^2$.

Étape 2: détermination de l'équation de la droite Δ passant par les deux points A et B.

L'équation de la droite Δ s'écrit: $y = c \cdot x + d$.

Nous devons déterminer c et d.

Le point $A \in \Delta$, d'où: $a^2 = c \cdot a + d$ (1).

Le point $B \in \Delta$, d'où: $\dfrac{1}{a^2} = c \cdot \left(-\dfrac{1}{a}\right) + d$ (2).

Dans ces conditions **c** et **d** sont solutions du système: $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$.

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = c \cdot a + d \\ \dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{c}{a} + d \end{cases} \iff \begin{cases} c \cdot a + d = a^2 \\ c \cdot a + \dfrac{c}{a} = a^2 - \dfrac{1}{a^2} \quad (1) - (2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c \cdot a + d = a^2 \\ c = \dfrac{\left(a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right)}{\left(a + \dfrac{1}{a}\right)} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c \cdot a + d = a^2 \\ c = a - \dfrac{1}{a} \end{cases} \qquad ((a^2 - b^2) = (a+b)(a-b))$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} d = a^2 - \left(a - \dfrac{1}{a}\right) \cdot a \\ c = a - \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = a - \dfrac{1}{a} \end{cases} .$$

Ainsi l'équation de la droite Δ est: $y = \left(a - \dfrac{1}{a}\right) \cdot x + 1.$

Étape 3: le point K (0; 1) appartient-il à la droite (AB) = Δ ?

L'équation de la droite Δ s'écrit: $y = \left(a - \dfrac{1}{a}\right) \cdot x + 1.$

Comme ici $x_k = 0$: la valeur de y_k est égale à 1, $\forall\ a > 0$.

Ainsi: oui, le point K (0; 1) appartient à la droite (AB), $\forall\ a > 0$.

Donc l'affirmation est vraie.