

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

—

SESSION 2026

—

MATHÉMATIQUES

(Classes de terminale voie générale spécialité mathématiques)

Durée : 5 heures

—

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.*

Consignes aux candidats

- Ne pas utiliser d'encre claire
- N'utiliser ni colle, ni agrafe
- Ne joindre aucun brouillon
- Ne pas composer dans la marge
- Numéroté chaque page en bas à droite (numéro de page / nombre total de pages)
- Sur chaque copie, renseigner l'en-tête + l'identification du concours :

Concours / Examen : CGL Epreuve : Mathématiques Matière : MATH Session : 2026

Le sujet comporte trois exercices indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Dans toute question, le candidat est autorisé à utiliser les résultats de questions précédentes même s'il ne les a pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 : Produits continués

Pour toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2, on appelle *suite des produits continués* associée à $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{1}{a_n}\right).$$

Ainsi, on a par exemple $u_3 = \left(1 - \frac{1}{a_0}\right)\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right)$ et plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{a_0}\right)\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_{n-1}}\right).$$

Ce produit de n facteurs se note aussi $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right)$.

Partie 1 : Préliminaires

- 1) Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2 et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des produits continués associée à $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel de $[0; 1[$.

Dans tout l'exercice, si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2, on note $P_\infty((a_k)_{k \in \mathbb{N}})$ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des produits continués associée à $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

On remarquera qu'il s'agit de la limite d'une suite de produits dont la convergence a été prouvée à la question 1). Ainsi,

$$\begin{aligned} P_\infty((a_k)_{k \in \mathbb{N}}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{a_0}\right) \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_{n-1}}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right) \right). \end{aligned}$$

- 2) Démontrer que $P_\infty((k+2)_{k \in \mathbb{N}}) = 0$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right) = 0.$$

- 3) Déterminer la valeur de $P_\infty((k+2)^2)_{k \in \mathbb{N}}$.

- 4) Soit $x \neq 1$ un réel. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, par

$$v_{n+1} = v_n \times \left(1 + x^{(2^n)}\right).$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \cdots (1+x^{(2^{n-1})}).$$

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$v_n = \frac{1 - x^{(2^n)}}{1 - x}.$$

- 5) Soit $q \geq 1$ un entier. À l'aide de la question 4), déterminer la valeur de $P_\infty((q^{(2^k)} + 1)_{k \in \mathbb{N}})$.

Partie 2 : Existence par algorithme glouton

Dans cette partie, on fixe un réel $\ell \in [0; 1[$. On cherche à déterminer une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que

$$\ell = P_\infty((a_k)_{k \in \mathbb{N}}).$$

On envisage la méthode suivante :

- écrire $\ell = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \tilde{\ell}$ où a est le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que $\tilde{\ell} \in [0; 1[$;
- itérer le procédé sur $\tilde{\ell}$.

Le reste de la partie est consacré à la formalisation de cette méthode.

Pour tout réel t , on note $\lfloor t \rfloor$ la *partie entière* de t , c'est-à-dire l'unique entier relatif m tel que $m \leq t < m+1$.

6) Soit $x \in [0; 1[$. Démontrer que l'entier $a = \left\lfloor \frac{1}{1-x} \right\rfloor + 1$ vérifie les inégalités

$$a \geq 2 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{a-1} \leq x < 1 - \frac{1}{a}.$$

On définit désormais deux suites $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $x_0 = \ell$ et, pour tout entier $k \geq 0$,

$$a_k = \left\lfloor \frac{1}{1-x_k} \right\rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{x_k}{1 - \frac{1}{a_k}}.$$

On ne demande pas de justifier que ces deux suites sont bien définies, ce qui résulte de la question 6) et d'un raisonnement par récurrence : pour tout entier $k \geq 0$, l'entier a_k est supérieur ou égal à 2 et x_k est un réel de $[0; 1[$.

7) Soit $k \geq 0$ un entier. Démontrer que $a_{k+1} - 1 \geq (a_k - 1)^2$.

8) Conclure que $\ell = P_\infty((a_k)_{k \in \mathbb{N}})$.

Partie 3 : Unicité et cas critique

Dans cette partie, on fixe un réel $\ell \in [0; 1[$.

9) Existe-t-il une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que $\ell = P_\infty((a_k)_{k \in \mathbb{N}})$?

10) Démontrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que $\ell = P_\infty((a_k)_{k \in \mathbb{N}})$ et vérifiant, pour tout entier $k \geq 0$, l'inégalité $a_{k+1} - 1 \geq (a_k - 1)^2$.

On note désormais $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ l'unique suite vérifiant les conditions de la question 10).

11) Démontrer que, s'il existe un rang k_0 tel que $a_{k+1} - 1 = (a_k - 1)^2$ pour tout $k \geq k_0$, alors ℓ est rationnel.

12) Démontrer que, si ℓ est rationnel, alors il existe un rang k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$a_{k+1} - 1 = (a_k - 1)^2.$$

Exercice 2 : Sommes consécutives signées

Partie 1 : Introduction

On écrit au tableau un certain nombre de puissances troisièmes (aussi appelées cubes) d'entiers successifs en partant de 1, par exemple

$$1^3 \quad 2^3 \quad 3^3 \quad 4^3 \quad 5^3 \quad 6^3 \quad 7^3 \quad 8^3 \quad 9^3 \quad 10^3 \quad 11^3 \quad 12^3 \quad 13^3 \quad 14^3 \quad 15^3$$

Puis on ajoute un signe + ou un signe – devant chacun de ces nombres, par exemple

$$+1^3 + 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 - 7^3 + 8^3 + 9^3 - 10^3 + 11^3 + 12^3 - 13^3 + 14^3 - 15^3$$

Une expression de cette forme sera appelée *somme de cubes consécutifs signés à partir de 1*.

Sur l'exemple ci-dessus, la somme vaut 10 et on constate ainsi que 10 s'écrit comme somme de cubes consécutifs signés à partir de 1.

Après quelques essais, on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= +1^3 \\ 2 &= -1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 - 5^3 + 6^3 + 7^3 - 8^3 + 9^3 - 10^3 - 11^3 + 12^3 \\ 3 &= -1^3 - 2^3 - 3^3 - 4^3 - 5^3 + 6^3 - 7^3 - 8^3 + 9^3 + 10^3 - 11^3 - 12^3 + 13^3 \\ 4 &= -1^3 - 2^3 + 3^3 + 4^3 - 5^3 + 6^3 + 7^3 - 8^3 \\ 5 &= -1^3 + 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + 7^3 + 8^3 - 9^3 \\ 6 &= +1^3 - 2^3 + 3^3 + 4^3 - 5^3 + 6^3 + 7^3 - 8^3 \end{aligned}$$

Ainsi, chacun des entiers de 1 à 6 s'écrit comme somme de cubes consécutifs signés à partir de 1.

1) Écrire 7 comme somme de cubes consécutifs signés à partir de 1.

On se demande désormais s'il est possible d'écrire tout entier $M \geq 1$ comme somme de cubes consécutifs signés à partir de 1, et de manière générale s'il est possible d'écrire tout entier naturel $M \geq 1$ comme somme de puissances k -ièmes consécutives signées à partir de 1.

La question est donc la suivante, étant donné un entier $k \geq 1$:

Est-il possible d'écrire tout entier $M \geq 1$ comme somme de puissances k -ièmes consécutives signées à partir de 1, c'est-à-dire sous la forme

$$M = \varepsilon_1 \times 1^k + \varepsilon_2 \times 2^k + \cdots + \varepsilon_n \times n^k,$$

où $n \geq 1$ est un entier et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont des éléments de $\{-1; +1\}$?

On pourra aussi écrire une telle somme

$$M = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \times i^k.$$

Dans la suite de cet exercice, on appellera *signe* un élément de $\{-1; +1\}$.

De cette façon, les éléments ε_i de $\{-1; +1\}$ qui apparaissent dans les expressions précédentes de M peuvent être appelés signes. Ils correspondent aux signes au sens habituel : +1 correspond au signe + et -1 correspond au signe -.

Partie 2 : Deux premiers cas, $k = 1$ et $k = 2$

- 2) Démontrer que, pour tout entier $M \geq 1$, il existe un entier $n \geq 1$ et des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1; +1\}$ tels que

$$M = \varepsilon_1 \times 1 + \varepsilon_2 \times 2 + \varepsilon_3 \times 3 + \dots + \varepsilon_n \times n.$$

- 3) Existe-t-il un entier $M \geq 1$ pour lequel une écriture comme celle de la question 2) est unique?

- 4) Déterminer des signes $u_0, u_1, u_2, u_3 \in \{-1; +1\}$ et un entier $R_2 \geq 0$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_0 \times n^2 + u_1 \times (n+1)^2 + u_2 \times (n+2)^2 + u_3 \times (n+3)^2 = R_2.$$

- 5) À l'aide de la question 4), démontrer que, pour tout entier $M \geq 1$, il existe un entier $n \geq 1$ et des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tels que

$$M = \varepsilon_1 \times 1^2 + \varepsilon_2 \times 2^2 + \varepsilon_3 \times 3^2 + \dots + \varepsilon_n \times n^2.$$

- 6) Existe-t-il un entier $M \geq 1$ pour lequel une écriture comme celle de la question 5) est unique?

Partie 3 : Des différences finies itérées

On appelle *fonction polynomiale à coefficients entiers de degré au plus d* une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \dots, a_d$ tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d.$$

Étant donné une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et un réel a , on note $\Delta_a(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (\Delta_a(f))(x) = f(x) - f(x+a).$$

- 7) Soit a un entier relatif et P une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré au plus $d \geq 1$.

Démontrer que $\Delta_a(P)$ est une fonction polynomiale à coefficients entiers de degré au plus $d-1$.

Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, on définit la suite de fonctions $(T_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ par $T_0(f) = f$, et pour tout entier $k \geq 1$,

$$T_k(f) = \Delta_{2^{k-1}}(T_{k-1}(f)).$$

Par exemple $T_3(f) = \Delta_4(\Delta_2(\Delta_1(f)))$ et plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$,

$$T_k(f) = \Delta_{2^{k-1}}(\Delta_{2^{k-2}}(\dots(\Delta_{2^0}(f))\dots)).$$

- 8) Démontrer qu'il existe une suite de signes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \geq 1$ et pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (T_k(f))(x) = u_0 f(x) + u_1 f(x+1) + u_2 f(x+2) + \dots + u_{2^k-1} f(x+2^k-1).$$

On note désormais $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de signes obtenue à la question 8).

- 9) Déterminer $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ et u_7 .

- 10) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 0$, il existe un entier relatif $R_k \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_0 n^k + u_1 (n+1)^k + \dots + u_{2^k-1} (n+2^k-1)^k = R_k.$$

Dans la suite de l'exercice, pour tout entier $k \geq 0$, on note R_k l'entier relatif de la question 10).

- 11) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$R_k = -k 2^{k-1} R_{k-1}.$$

En déduire, pour tout entier $k \geq 0$, une expression de R_k en fonction de k .

Partie 4 : Une initialisation incongrue

Dans cette partie on fixe un entier $k \geq 1$ ainsi qu'un entier $r \geq 2$.

- 12) Soit a et b deux entiers. Démontrer que, si r divise $a - b$, alors r divise $a^k - b^k$.

Dans les questions 13), 14) et 15) on fixe un entier $n \geq 1$.

- 13) Démontrer que

$$r \text{ divise } \left(n^k + (n+1)^k + \cdots + (n+r^2-1)^k \right).$$

- 14) Démontrer qu'il existe un entier c compris entre n et $n+r-1$ tel que r divise $c^k - 1$.

- 15) En déduire qu'il existe des signes $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{n+r^2-1}$ tels que

$$r \text{ divise } \left(\left(\varepsilon_n n^k + \varepsilon_{n+1} (n+1)^k + \cdots + \varepsilon_{n+r^2-1} (n+r^2-1)^k \right) - 2 \right).$$

Partie 5 : Conclusion

Dans cette partie on fixe un entier $k \geq 1$.

- 16) Conclure que, pour tout entier $M \geq 1$, il existe un entier $n \geq 1$ et des signes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ tels que

$$M = \varepsilon_1 \times 1^k + \varepsilon_2 \times 2^k + \cdots + \varepsilon_n \times n^k.$$

- 17) Existe-t-il un entier $M \geq 1$ pour lequel une écriture comme celle de la question 16) est unique?

Partie 6 : Généralisation

- 18) Soit P une fonction polynomiale à coefficients entiers. On suppose qu'il n'existe pas d'entier $\delta \geq 2$ tel que δ divise $P(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.

Démontrer que, pour tout $M \geq 1$, il existe un entier $n \geq 1$ et des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tels que

$$M = \varepsilon_1 P(1) + \varepsilon_2 P(2) + \cdots + \varepsilon_n P(n).$$

Exercice 3 : Fromage alléchant

Un corbeau et un renard souhaitent se partager un fromage qui a la forme d'un disque d'aire 1. Chacun est affamé et veut manger autant de fromage que possible. Pour des raisons d'équité, ils ont décidé de couper le fromage en quatre parts; le corbeau choisira d'abord la part de son choix, puis le renard choisira deux parts, et le corbeau prendra la dernière part.

La meilleure manière de découper un fromage consiste à utiliser un fil à couper le fromage. Chaque utilisation du fil permet de découper le fromage selon un segment dont les extrémités se trouvent sur le bord du disque; c'est ce que l'on appelle communément « donner un coup de fil ». Pour obtenir quatre parts en un minimum de coups de fil, le corbeau et le renard vont donc utiliser celui-ci deux fois, de manière à obtenir deux segments qui se croisent en un point intérieur au disque.

Pour tout réel $g \in [0; 1]$, on dit que le corbeau dispose d'une stratégie *g-gourmande* s'il peut se débrouiller pour récupérer deux parts dont la somme des aires est supérieure ou égale à g . On s'intéresse, selon que le corbeau ou le renard donne chacun des coups de fil, à l'ensemble des réels g pour lesquels une telle stratégie *g-gourmande* existe.

- 1) Soit a et b deux réels strictement positifs de somme $a + b = 1$. Démontrer que le corbeau peut faire en sorte que son premier coup de fil découpe le fromage en deux parts d'aires a et b .
- 2) Dans un premier temps, le corbeau donne les deux coups de fil. Pour quels réels g dispose-t-il d'une stratégie *g-gourmande*?
- 3) Le renard étant mécontent de la situation précédente, il donne désormais le premier de coup de fil; le corbeau donne toujours le second coup de fil. Dans ces nouvelles conditions, pour quels réels g le corbeau dispose-t-il d'une stratégie *g-gourmande*?
- 4) Troisième cas : cette fois-ci, le corbeau donne le premier coup de fil, et le renard donne le second. Pour quels réels g le corbeau dispose-t-il maintenant d'une stratégie *g-gourmande*?
- 5) Enfin, les deux comparses conviennent que le renard donnera les deux coups de fil. Pour quels réels g le corbeau dispose-t-il d'une stratégie *g-gourmande*?

Pour des raisons esthétiques, le corbeau et le renard décident désormais que les deux segments selon lesquels ils vont couper le fromage doivent être orthogonaux.

- 6) Reprendre la question 2) dans ces nouvelles conditions.

FIN DU SUJET

