COMPOSITION MATHÉMATIQUES
CONCOURS GÉNÉRAL

SUJET, Session 2023

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2023

MATHÉMATIQUES

(Classes de terminale voie générale spécialité mathématiques)

DURÉE : 5 HEURES

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Consignes aux candidats

- Ne pas utiliser d'encre claire
- N'utiliser ni colle, ni agrafe
- Numéroter chaque page en bas à droite (numéro de page / nombre total de pages)
- Sur chaque copie, renseigner l'en-tête + l'identification du concours :

Concours / Examen : CGL

Epreuve : 101 **Matière : MATH** **Session : 2023**

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Exercice 1 : Soyons rationnels !

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $v(n)$ le plus grand entier k tel que $\dfrac{n}{2^k}$ soit un entier.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence, en posant $u_1 = 1$ puis, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0\,; \\ 1 + 2v(n) - \dfrac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1) Donner la valeur des entiers $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.
2) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $v(n) = 0$ si n est impair et que $v(n) = v\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ si n est pair.
3) Calculer les huit premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et vérifier que $u_8 = 4$.
4) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.
5) Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme u_n.
6) Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n.

Exercice 2 : Limite sympathique !

Partie A : Quelques exemples

1) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0,$$

d'inconnue x.

   a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note x_n. Exprimer x_n en fonction de n.
   b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; on note x_∞ sa limite.
   c) Démontrer que x_∞ est solution de l'équation

$$x^2 - 1 = 0.$$

2) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$\frac{1}{n}y^2 - y - 1 = 0,$$

d'inconnue y.

   a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note y_n.
   b) Démontrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

3) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1 = 0,$$

d'inconnue z.

a) Soit n un entier naturel non nul.

i) Étudier les variations de la fonction $z \mapsto z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

ii) En déduire que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note z_n. Démontrer que z_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

b) Démontrer que la suite $(z_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente.

On pourra s'intéresser au signe du réel $z_{n+1}^3 + \frac{1}{n}z_{n+1}^2 - 1$.

c) On note z_∞ la limite de la suite $(z_n)_{n \geqslant 1}$. Démontrer que z_∞ est solution de l'équation

$$z^3 - 1 = 0.$$

4) On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$\frac{1}{n}t^3 - t^2 - 1 = 0,$$

d'inconnue t.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle ; on la note t_n.

b) La suite $(t_n)_{n \geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Partie B : Polynômes sympathiques

Dans les deux prochaines parties, on considère un entier $d \geqslant 1$. La fonction P est un *polynôme de degré au plus d* s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ tels que

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

pour tout réel x.
Soit $P\colon x \mapsto a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus d. On dit que :

- P est *initialement sympathique* si $a_0 = -1$ et si $a_k \geqslant 0$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d$;
- P est *faussement sympathique* si $a_0 = -1$ et si $a_k \leqslant 0$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d$;
- P est *vraiment sympathique* si $a_0 = -1$ et s'il existe un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d-1$ et pour lequel $a_1 \leqslant 0, a_2 \leqslant 0, \ldots, a_k \leqslant 0$ et $a_{k+1} > 0, a_{k+2} \geqslant 0, \ldots, a_d \geqslant 0$.

Enfin, on dit que P est *sympathique* s'il est initialement, faussement ou vraiment sympathique.

5) Quels sont les polynômes qui sont à la fois faussement sympathiques et initialement sympathiques ?

6) Démontrer que tout polynôme faussement sympathique est

a) strictement négatif sur l'intervalle $[0, +\infty[$;

b) décroissant sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

7) Soit P un polynôme vraiment sympathique et initialement sympathique.

a) Démontrer que P est strictement croissant sur l'intervalle $[0, +\infty[$;

b) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.

8) Soit P un polynôme vraiment sympathique mais pas initialement sympathique.

a) Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$, un entier $\ell \geqslant 0$ et un polynôme Q vraiment sympathique tels que

$$P'(x) = bx^\ell Q(x)$$

pour tout réel x.

b) Démontrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que le polynôme P vérifie les quatre propriétés suivantes :

- ▹ P est décroissant sur l'intervalle $[0, r]$;
- ▹ P est strictement croissant sur l'intervalle $[r, +\infty[$;
- ▹ P est strictement négatif sur l'intervalle $[0, r]$;
- ▹ l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[r, +\infty[$.

9) Quels sont les polynômes sympathiques P pour lesquels l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution strictement positive ? Donner, dans ce cas, le tableau de signes de P sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

<u>Partie C : De la suite dans les idées</u>

On considère désormais des polynômes vraiment sympathiques $P_1, P_2, \ldots$ Puisque ces polynômes sont de degré au plus d, on peut écrire chaque polynôme P_n sous la forme

$$P_n\colon x \longmapsto a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \cdots + a_{2,n}x^2 + a_{1,n}x + a_{0,n}.$$

On suppose en outre, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant d$, que la suite $(a_{k,n})_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note $a_{k,\infty}$ sa limite.
On considère alors le polynôme P_∞ défini par

$$P_\infty\colon x \longmapsto a_{d,\infty}x^d + a_{d-1,\infty}x^{d-1} + \cdots + a_{2,\infty}x^2 + a_{1,\infty}x + a_{0,\infty}.$$

Enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note x_n l'unique solution strictement positive de l'équation $P_n(x) = 0$. Ci-dessous, on étudie la convergence éventuelle de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

10) Soit t un réel fixé. Démontrer que la suite $(P_n(t))_{n\geqslant 1}$ converge vers $P_\infty(t)$.

11) Démontrer que le polynôme P_∞ est sympathique.

12) On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est vraiment sympathique, et on note x_∞ l'unique solution strictement positive de l'équation $P_\infty(x) = 0$.

 a) Soit u et v deux réels tels que $0 < u < x_\infty < v$. Démontrer qu'il existe un entier $M_{u,v}$ tel que $P_n(u) < 0 < P_n(v)$ pour tout entier $n \geqslant M_{u,v}$.

 b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x_∞.

13) On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est faussement sympathique. Démontrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

14) Retrouver les résultats de la partie A.

Exercice 3 : Polynômes et polygones réguliers

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit k un entier tel que $k \geqslant 3$. Les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$ sont les sommets d'un polygone *régulier de centre O* si ces points

- ▹ sont deux à deux distincts,
- ▹ apparaissent dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre) sur un même cercle de centre O, et
- ▹ vérifient l'égalité $M_1M_2 = M_2M_3 = \cdots = M_{k-1}M_k = M_kM_1$.

En particulier, pour $k = 3$, il s'agit d'un triangle équilatéral ; pour $k = 4$, il s'agit d'un carré.

Pour tout entier $d \geqslant 0$, une fonction P est un polynôme de *degré* d s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ tels que $a_d \neq 0$ et

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

pour tout réel x ; on pourra admettre que, pour un tel polynôme, l'équation $P(x) = 0$ admet au plus d solutions réelles.
Quant à elle, la fonction

$$P\colon x \mapsto 0$$

est appelée le *polynôme nul*.
Enfin, étant donné un polynôme P (nul ou non), on note $\mathscr{C}_P$ la courbe représentative de P dans le repère $\mathscr{R}$.

Partie A : Triangles équilatéraux

1) Soit P un polynôme de degré 1. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$?
2) On considère les points

$$A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ B\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ et } C\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

   a) Démontrer que A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.
   b) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à la courbe représentative du polynôme

$$Q\colon x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x^2 - 2\right).$$

   c) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à la courbe représentative du polynôme

$$R\colon x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x^2 - 2\right) + x\left(x^2 - 1\right).$$

   d) Démontrer que, pour tout entier $d \geqslant 2$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe représentative contient les points A, B et C.

Partie B : Carrés de centre O

Dans les questions 3) et 4), on considère un polynôme P et un carré $ABCD$ de centre O dont les quatre sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$.

3) a) Exprimer les coordonnées des points B, C et D en fonction de celles de A. Démontrer que les abscisses de A, B, C et D sont distinctes et non nulles.
   b) Démontrer que P est non nul et que son degré vaut au moins 3.
4) On suppose dans cette question qu'il existe des réels a, b et c tels que

$$P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c.$$

   a) Démontrer que $a = 0$ et $c = 0$.
   b) Démontrer que les abscisses respectives de A, B, C et D sont solutions de l'équation

$$P(P(x)) + x = 0.$$

   c) Démontrer que le polynôme

$$Q\colon x \mapsto x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b(b^2 + 1)x + b^2 + 1$$

   admet au moins deux racines positives distinctes.

d) Démontrer que $b < 0$.

e) On suppose qu'il existe deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$ et

$$Q(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

pour tout réel x. Démontrer qu'alors $b = -\sqrt{8}$, puis déterminer les valeurs de α et β.

5) a) Démontrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 et un carré $ABCD$ de centre O dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$.

b) Pour quels entiers d existe-t-il un polynôme de degré d dont la courbe représentative contient les points A, B, C et D obtenus en question 5)a) ?

Partie C : Où l'on prouve que $d \geqslant k-1$

Soit $M_1M_2\cdots M_k$ un polygone régulier de centre O. On suppose dans cette question qu'il existe un polynôme P, de degré d, dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$. On souhaite alors démontrer que $d \geqslant k-1$.

Pour tout i, on note (x_i, y_i) les coordonnées de M_i dans le repère $\mathscr{R}$.

6) a) Pourquoi peut-on supposer que x_1 est inférieur ou égal à $x_2, x_3, \ldots, x_k$ et que $y_1 \leqslant 0$?

b) Démontrer que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et que les ordonnées y_i sont non nulles.

c) Démontrer qu'il existe un nombre réel $R > 0$ et un nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]\,0, \pi/k\,[$ tels que $x_1 = -R\cos(\theta)$ et $y_1 = -R\sin(\theta)$.

d) Démontrer que $x_1 < x_k < x_2 < x_{k-1} < x_3 < x_{k-2} < \cdots$

e) Démontrer que P admet une racine sur chacun des $k-1$ intervalles

$$]\,x_1, x_k\,[\,,\ ]\,x_k, x_2\,[\,,\ ]\,x_2, x_{k-1}\,[\,,\ ]\,x_{k-1}, x_3\,[\,,\ ]\,x_3, x_{k-2}\,[\,,\ \ldots$$

f) En conclure que $d \geqslant k-1$.

Partie D : Où l'on prouve que tout entier $d \geqslant k-1$ convient

On suppose dans cette partie que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et on veut démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k-1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

7) Soit a et b deux réels. Dans le repère $\mathscr{R}$, on considère les points

$$A(\cos(a), \sin(a)),\ B(\cos(a+b), \sin(a+b)) \text{ et } C(-\sin(a), \cos(a)).$$

a) Démontrer que le repère $\mathscr{R}' = (O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est orthonormé.

b) Quelles sont les coordonnées du point B dans le repère $\mathscr{R}'$?

c) En déduire que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\ ;$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

8) On considère la suite de polynômes définie par $T_0 : x \mapsto 1$, $T_1 : x \mapsto x$ et

$$T_{n+2} : x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

a) Démontrer que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel θ.

b) Soit θ un réel, et soit $\ell \geqslant 1$ et $j \geqslant 0$ deux entiers. Démontrer que

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \sin(\ell\theta)\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right).$$

c) Démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k-1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$.