CORRIGÉ

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S • 2019

Source • Gilbert JULIA

Concours Général Maths 2019, série S : Correction

Auteur du document : Gilbert JULIA, professeur agrégé honoraire
Ancien préparateur au concours du CAPES de Mathématiques

Par son intérêt, son originalité, la variété des obstacles qu'il oppose à sa résolution, le cru 2019 du Concours Général se place légitimement parmi les meilleurs millésimes des vingt dernières années.

On relève notamment dans la correction deux variantes du raisonnement par récurrence : un raisonnement par récurrence forte (l'hypothèse de récurrence porte sur tous les rangs précédents et non sur le seul prédécesseur), et un raisonnement par récurrence double (l'hypothèse de récurrence porte sur les deux prédécesseurs).

Problème 1 : Ensembles remarquables de fonctions

Dans ce problème, il est question de déterminer quels sont les ensembles E de fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ *et prenant leurs valeurs dans* $[0\ ;\ +\infty[$ *qui satisfont une liste de cinq ou six propriétés.*

- *La propriété* **(P3)** *est la stabilité pour l'addition (la somme de deux fonctions de E appartient à E).*
- *La propriété* **(P4)** *est la stabilité pour la composition (la composée de deux fonctions de E appartient à E).*
- *La propriété* **(P6)** *est la stabilité pour la multiplication (le produit de deux fonctions de E appartient à E).*

Les propriétés **(P1)** *et* **(P2)** *introduisent quelques « briques » élémentaires permettant de bâtir l'édifice E en question. Mais lequel ? C'est ce que nous allons voir.*

1.a. D'après la propriété **(P1)**, les fonctions u et v appartiennent à **T**. D'après la propriété **(P4)**, leur composée $v \circ u$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $v \circ u\,(x) = \ln\left(\left(e^x - 1\right) + 1\right) = \ln\left(e^x\right) = x$ appartient à **T**.
La fonction identique $id_{[0;\ +\infty[}$ notée I dans ce problème : $x \mapsto I(x) = x$ appartient à **T**.

1.b. La fonction identique appartient à **T** et, d'après la propriété **(P2)**, **T** contient les constantes positives.
D'après la propriété **(P6)**, l'ensemble **T** contient le produit de la fonction I par toute constante positive :
Toutes les fonctions linéaires $x \mapsto a\,x$ où a est un coefficient positif appartiennent à **T**.

D'après la propriété **(P3)**, toute somme d'une fonction linéaire de coefficient positif et d'une constante positive appartient à **T** : toutes les fonctions affines $x \mapsto a\,x + b$ où a et b sont des constantes positives appartiennent à **T**.

Soit réciproquement $x \mapsto f(x) = a\,x + b$ une fonction affine.

- Si $a < 0$, l'image par f de l'intervalle $\left]\frac{b}{a},\ +\infty\right[$ est incluse dans $\left]-\infty,\ 0\right[$. f n'est pas à valeurs dans $[0,\ +\infty[$, cette fonction n'appartient pas à **T**.
- Si $a = 0$ et $b < 0$, l'image par f de $[0,\ +\infty[$ est un réel négatif, f n'est pas à valeurs dans $[0,\ +\infty[$, cette fonction n'appartient pas à **T**.

- Si $a > 0$ et $b < 0$, l'image de l'intervalle $\left[0, \frac{b}{a}\right[$ est incluse dans $\left]-\infty, 0\right[$, *f* n'est pas à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$, cette fonction n'appartient pas à **T**.

Par conséquent, les fonctions affines $x \mapsto a\,x + b$ où *a* et *b* sont des constantes positives appartiennent à **T**, et ce sont les seules fonctions affines qui appartiennent à **T**. Notons qu'il s'agit là des fonctions polynomiales du premier degré définies sur $\left[0\ ;+\infty\right[$ et à valeurs dans $\left[0\ ;+\infty\right[$.

1.c. En vertu de la propriété **(P6)**, dès lors que la fonction identique appartient à **T**, toutes les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ appartiennent à **T** (elles sont produit *n* fois de la fonction identique) ainsi que toutes les fonctions monômes : $x \mapsto a_n\, x^n$ où a_n est un coefficient positif.

En vertu de la propriété **(P3)**, toute fonction polynomiale $x \mapsto a_d\, x^d + \ldots + a_0$ où tous les a_i sont des coefficients positifs appartient à **T** (elles sont sommes de monômes).

Il en est ainsi de la fonction polynomiale : $x \mapsto 2\,x^2 + 4$.

Quant à la fonction $x \mapsto 3\,x$, en tant que fonction linéaire à coefficient positif, elle appartient à **T**.

Pour tout x positif : $p(x) = \left(2\,x^2 + 4\right) - 3\,x = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \geq 0$: la différence entre la fonction $x \mapsto 2\,x^2 + 4$ et la fonction $x \mapsto 3\,x$ est une fonction positive sur $\left[0, +\infty\right[$. En vertu de la propriété **(P5)**, cette différence appartient à **T**. La fonction $x \mapsto p(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 4$ appartient à **T**.

1.d. Soit *f* une fonction polynomiale $x \mapsto f(x) = a_d\, x^d + \ldots + a_0$ avec $a_d \neq 0$ définie sur $\left[0, +\infty\right[$ et à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$. Avoir des valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$ signifie admettre un minimum *m* positif sur $\left[0, +\infty\right[$.

Deux conditions au moins sont nécessaires pour cela :
- $a_d > 0$ (si $a_d < 0$, *f* admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$, elle n'est pas à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$).
- $a_0 \geq 0$ (si $a_0 < 0$, $f(0) < 0$, *f* n'est pas non plus à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$).

Soit *U* la partie de l'ensemble des coefficients $\left\{a_d, \ldots, a_0\right\}$ contenant les coefficients positifs ou nuls. Cette partie n'est pas vide, car elle contient au moins a_d et a_0. Soit *V* la partie (éventuellement vide) de l'ensemble $\left\{a_d, \ldots, a_0\right\}$ contenant les coefficients strictement négatifs.

Si *V* est vide, *f* appartient à **T** comme on l'a noté dans **1.c.**

Sinon, posons : $g(x) = \sum_{a_i \in U} a_i\, x^i$ et $h(x) = \sum_{a_i \in V} -a_i\, x^i$. Ces deux fonctions polynomiales sont à coefficients positifs, elles appartiennent toutes les deux à **T**.

Pour tout x de $\left[0, +\infty\right[$: $g(x) - h(x) = f(x) \geq m \geq 0$. la différence $g - h$ est une fonction positive sur $\left[0, +\infty\right[$. En vertu de **(P5)**, cette différence appartient à **T**. Toute fonction polynomiale définie sur $\left[0, +\infty\right[$ et à valeurs dans $\left[0, +\infty\right[$ appartient à **T**.

2. *Il s'agit de savoir si la propriété* ***(P6)*** *est indispensable pour justifier que les fonctions* $x \mapsto a\,x^n$ *où a est un coefficient positif appartiennent à* ***S****. C'est en effet pour cela que nous avons utilisé cette propriété, à propos de* ***1.b*** *(cas des fonctions linéaires) et de* ***1.c****. Examinons ce que nous pouvons construire avec les « briques » de base (u, v et constantes positives) en exploitant les propriétés autres que* ***(P6)****.*

Pour tout entier strictement positif n et toute constante positive c, la fonction $x \mapsto v_{n,c}(x) = n\ln(x+1)+c$ appartient à **S**. En effet : $v_{n,c}(x) = \left(\underbrace{\ln(x+1)+\ln(x+1)+\ldots+\ln(x+1)}_{(n\ fois)}\right)+c$. Nous utilisons **(P1)**, **(P2)** et **(P3)**.

En vertu des mêmes propriétés, pour tout $d \geq 0$, la fonction $x \mapsto u_d(x) = e^x - 1 + d$ appartient à **S**.

En vertu de **(P4)**, la composée de ces deux fonctions appartient à **S** :
$x \mapsto u_d \circ v_{n,c}(x) = \exp(n\ln(x+1)+c) - 1 + d = e^c.(x+1)^n - 1 + d$ appartient à **S**.

Le nombre c étant positif, son exponentielle e^c est supérieure ou égale à 1, et d étant positif, le nombre $d-1$ est supérieur ou égal à -1. Retenons ainsi que, pour le moment, nous avons établi que toutes les fonctions polynomiales $x \mapsto a.(x+1)^n + b$ appartiennent à **S** lorsque $a \geq 1$ et $b \geq -1$.

Cas des fonctions affines $(n=1)$

- Toutes les fonctions $x \mapsto c.(x+1)+d = c\,x + (c+d)$ appartiennent à **S** lorsque $c \geq 1$ et $d \geq -1$.
- La fonction identique appartient à **S** (elle correspond au choix de constantes : $c=1,\ d=-1$).
- La différence $[c.(x+1)+d] - x = (c-1)x + (c+d)$ est positive ou nulle pour tout x de $[0, +\infty[$.

En vertu de la propriété **(P5)**, cette fonction $x \mapsto (c-1)x + (c+d)$ appartient à **S**. Il s'agit d'une fonction affine dont les coefficients $a = c-1$ et $b = c+d$ sont des coefficients positifs : nous avons pleinement retrouvé les conditions de **1.c**. Toutes les fonctions affines $x \mapsto a\,x + b$ où a et b sont des constantes positives appartiennent à **S**.

Cas des fonctions puissances et des fonctions polynomiales
Nous allons démontrer par récurrence forte que pour tout réel a_n strictement positif et pour tout entier n strictement positif, la fonction monôme $x \mapsto a_n\,x^n$ appartient à **S.**

Le cas des fonctions affines initialise cette propriété lorsque $n=1$. Supposons cette propriété vérifiée jusqu'au rang $n-1$.

Soit a_n un réel strictement positif.
Alors : $x \mapsto (a_n+1).(x+1)^n$ et $x \mapsto .(x+1)^n$ sont deux fonctions qui appartiennent à **S**, d'après ce que nous avons vu en début de question.

Leur différence est une fonction positive, d'après **(P5)** elle appartient à **S**.
Cette différence est la fonction : $x \mapsto a_n.(x+1)^n = a_n\,x^n + \sum_{k=0}^{k=n-1} a_n \binom{n}{k} x^k$.

D'après l'hypothèse de récurrence, toutes les fonctions monômes $x \mapsto a_n \binom{n}{k} x^k$ de degré $\leq n-1$ appartiennent à **S**. D'après **(P3)**, leur somme $\sum_{k=0}^{k=n-1} a_n \binom{n}{k} x^k$ appartient à **S**.

La différence des deux fonctions de **S** : $x \mapsto a_n.(x+1)^n - \sum_{k=0}^{k=n-1} a_n \binom{n}{k} x^k = a_n\, x^n$ est une fonction positive, elle appartient à **S**. Ainsi, pour tout coefficient a_n positif, la fonction $x \mapsto a_n\, x^n$ appartient à **S**, ce qui démontre l'hérédité de la propriété en question ici.

En conclusion, pour tout réel a_n strictement positif et pour tout entier n strictement positif, la fonction monôme $x \mapsto a\, x^n$ appartient à **S.** Ceci rétablit pleinement les conditions dans lesquelles nous avons démontré **1.d**. (nous n'avons pas utilisé **(P6)** dans **1.d**) : La réponse donnée à la question **1.d** est encore valable.

3.a. Soit d un nombre entier strictement positif. En vertu de la propriété **(P6)**, la fonction $x \mapsto v_d(x) = d\ln(x+1)$ appartient à **V**, en tant que produit de deux fonctions de **V**, en l'occurrence une constante positive et la fonction v de l'énoncé.

En vertu de la propriété **(P4)**, la composée $x \mapsto u \circ v_d(x) = \exp(d\ln(x+1)) - 1 = (x+1)^d - 1$ appartient à **V**.
Il s'agit de la fonction polynomiale $Q_d(x) = (x+1)^d - 1$. Remarquons que, en particulier : $Q_1(x) = (x+1) - 1 = x$. L'ensemble **V** contient la fonction identique.

Dès lors que **V** contient la fonction identique, **V** contient toute fonction linéaire $x \mapsto a\, x$ dont le coefficient a est positif, et **V** contient, pour tout entier naturel n, toute fonction monôme $x \mapsto a_n\, x^n$ dont le coefficient est positif : c'est le produit d'une fonction constante positive et, n fois, de la fonction identique, toutes deux appartenant à **V** ; on applique **(P6)**.

3.b. D'après la **formule du binôme de Newton** : $(x+1)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} x^k$.

Les coefficients en question sont : $a_0 = a_d = 1$ et plus généralement $a_k = \binom{d}{k}$, c'est-à-dire $\frac{d!}{k!\,(d-k)!}$ coefficients jouant un rôle dans la distribution de probabilité d'une loi binomiale et nombre de combinaisons de k éléments parmi d. Ces coefficients sont tous des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Autre solution à cette question (proposée par Pascal NARDI de Montpellier) :
Soit x un réel positif ou nul. Introduisons une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres d et $\frac{x}{1+x}$. Dans ces conditions, pour $0 \le k \le d$: $P([X = k]) = \binom{d}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k . \left(\frac{1}{1+x}\right)^{d-k} = \frac{1}{(1+x)^d} \binom{d}{k} . x^k$.

Or : $\sum_{k=0}^{d} P([X = k]) = 1$. Donc : $\frac{1}{(1+x)^d} \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} . x^k = 1$ ou aussi bien : $(1+x)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} . x^k$. Le nombre $\binom{d}{k}$ est un entier supérieur ou égal à 1 car il représente, dans le cadre de la loi binomiale que nous avons introduite, le nombre de d-uplets contenant k fois l'issue dont $\frac{x}{1+x}$ est la probabilité.

3.c. Soit $x \mapsto f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x$ une fonction polynomiale de degré n et s'annulant en zéro.
Notons M le nombre : $M = \max(|a_i|,\ i = 1,...n)$. Choisissons $d = n$ et $c = M$ (mais tout coefficient c tel que $c \ge M$ ferait aussi bien l'affaire).
Alors : $M(x + ... + x^n) - f(x) = (M - a_n)x^n + ... + (M - a_2)x^2 + (M - a_1)x$.

Pour tous les indices i, $1 \leq i \leq n$: $M - a_i \geq M - |a_i| \geq 0$. La différence est une fonction polynomiale dont tous les coefficients obtenus sont positifs ou nuls.

3.d. La question **3.a** a montré que toute fonction monôme $x \mapsto a_n\, x^n$ dont le coefficient est positif appartient à **V**. Nous savons aussi que toute fonction polynomiale $Q_d(x) = (x+1)^d - 1$ appartient à **V**. Il reste à montrer que l'on peut effectuer des « assemblages » additifs.

*La clef de cette question est de parvenir à démontrer, sans pour autant utiliser la propriété **(P3)**, que toute fonction polynomiale à coefficients positifs et s'annulant en zéro appartient à **V**. Ceci est un enjeu stratégique. Nous en proposons une justification, certes passablement longue, par récurrence sur le degré de la fonction polynomiale ; la question **3.c** nous ouvre une piste de résolution.*

Soit à démontrer, pour tout entier strictement positif n, la propriété suivante : « Toute fonction polynomiale de degré n à coefficients positifs et s'annulant en zéro appartient à **V** ».

La propriété est vraie au rang 1 : les fonctions polynomiales de degré 1 à coefficients positifs et s'annulant en zéro sont les fonctions linéaires et toute fonction linéaire dont le coefficient est positif appartient à **V**.

Voyons (facultativement) ce qu'il se passe pour le degré 2.

Toutes les fonctions monômes du second degré $x \mapsto a_2\, x^2$ dont le coefficient est positif appartiennent à **V** et, à part elles, nous connaissons une autre fonction du deuxième degré qui appartient à **V** : la fonction $x \mapsto Q_2(x) = x^2 + 2x$

Soit $f_2(x) = a\,x^2 + b\,x$ une fonction polynomiale du second degré s'annulant en zéro et soit c un réel supérieur ou égal à $\sup(a,\, b)$.

La fonction polynomiale $x \mapsto c\,Q_2(x) = c\left(x^2 + 2x\right)$ appartient à **V**. Puisque $c \geq a$, le monôme $x \mapsto (c-a)x^2$ appartient à **V**.

De plus, pour tout x de $[0\,;+\infty[$: $c\left(x^2 + 2x\right) - (c-a)x^2 = ax^2 + 2c\,x \geq 0$ car les deux coefficients a et $2c$ sont positifs. D'après la propriété **(P5)**, cette fonction différence $x \mapsto a\,x^2 + 2c\,x$ appartient à **V**.

La fonction $x \mapsto a\,x^2 + 2c\,x$ appartient à **V** et d'autre part, puisque $2c - b \geq c - b \geq 0$, la fonction monôme : $x \mapsto (2c-b)x^2$ appartient à **V**.

Leur fonction différence $x \mapsto \left(a\,x^2 + 2c\,x\right) - (2c-b)x = ax^2 + b\,x$ est positive sur $[0\,;+\infty[$ car c'est une fonction polynomiale qui a des coefficients positifs : d'après la propriété **(P5)** elle appartient à **V**.

Ainsi, toute fonction polynomiale du second degré s'annulant en zéro et dont les coefficients sont positifs appartient à **V**.

Supposons maintenant que, pour un certain entier $d \geq 3$, toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $d-1$ à coefficients positifs et s'annulant en zéro appartienne à **V**. Nous allons suivre une démarche analogue.

NB. Nous aurions pu ne pas examiner le cas du degré 2 que nous avons pris le soin de traiter en « exemple » et supposer la propriété vraie pour un d tel que $d \geq 2$.

Soit $f(x) = a_d\, x^d + a_{d-1}\, x^{d-1} + ... + a_1\, x$ une fonction polynomiale de degré d à coefficients tous positifs et s'annulant en zéro. Soit c un nombre supérieur ou égal à $\sup(a_1,\, a_2, ... a_d)$.

La fonction polynomiale $x \mapsto c\,Q_d(x) = c\,(x+1)^d - 1$ appartient à **V** et puisque $c \geq a_d$, le monôme $x \mapsto (c - a_d)x^d$ appartient lui aussi à **V**.

Leur fonction différence est la fonction : $c\left((x+1)^d - 1\right) = c\sum_{k=1}^{d}\binom{d}{k}x^k - (c - a_d)x^d$, c'est-à-dire la fonction : $a_d\, x^d + \sum_{k=1}^{d-1} c\binom{d}{k}x^k$. Elle est positive sur $[0\,;+\infty[$. En vertu de **(P5)**, elle appartient à **V**.

Tous les coefficients de $\sum_{k=1}^{d-1} c\binom{d}{k}x^k$ sont supérieurs ou égaux à c. Nous avons vérifié en effet dans la question **3.c** que les nombres $\binom{d}{k}$ sont tous des entiers au moins égaux à 1.

Il en résulte alors que la fonction polynomiale de degré $d-1$ et s'annulant en zéro : $\sum_{k=1}^{d-1}\left[c\binom{d}{k} - a_k\right]x^k$ a des coefficients tous positifs. D'après l'hypothèse de récurrence, elle appartient à **V**.

La fonction différence $\left[a_d\, x^d + \sum_{k=1}^{d-1} c\binom{d}{k}x^k\right] - \sum_{k=1}^{d-1}\left[c\binom{d}{k} - a_k\right]x$ n'est autre que la fonction polynomiale $a_d x^d + \sum_{k=1}^{d-1} a_k\, x^k = f(x)$ qui est une fonction positive sur $[0\,;+\infty[$. D'après la propriété **(P5)**, elle aussi appartient à **V**.

En résumé, si la propriété à démontrer est vraie pour le degré $d-1$, alors elle l'est pour le degré d : cette propriété est héréditaire.

Or, elle a été vérifiée au rang 1. Elle est donc vraie pour tout degré d supérieur ou égal à 1.

Toute fonction polynomiale à coefficients positifs et s'annulant en zéro, de degré ≥ 1, appartient à **V**.

Ce point clef étant acquis, et en reprenant les hypothèses de **1.c**, soit *f* une fonction polynomiale à valeurs dans $[0\ ;+\infty[$:

$f(x)=c\left(x+...+x^n\right)-\left[(c-a_n)x^n+...+(c-a_2)x^2+(c-a_1)x\right]$ est une différence de deux fonctions qui appartiennent à **V** et cette différence est positive $[0\ ;+\infty[$: en vertu de **(P5)** , une telle fonction *f* appartient elle aussi à **V**. L'ensemble **V** contient toutes les fonctions polynomiales définies sur $[0\ ;+\infty[$ et à valeurs dans $[0\ ;+\infty[$.

3.e.i. Soit *f* une fonction définie sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$.

Si *f* est une fonction bornée, il existe un réel *b* positif tel que pour tout *x* appartenant à $[0,+\infty[$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0,\ b]$. Autrement dit $f([0,+\infty[)\subset[0,\ b]$.

Dans ce cas, quel que soit le réel *a* positif ou nul, vu que l'intervalle $[0,\ a]$ est inclus dans $[0,+\infty[$: $f([0,\ a])\subset f([0,+\infty[)\subset[0,\ b]$.

Il existe un réel *b*, en l'occurrence le même pour tous les réels *a*, tel que $0\le x\le a\Rightarrow 0\le f(x)\le b$, la fonction *f* est segmentée.
Toute fonction bornée est une fonction segmentée.

La réciproque est fausse. La fonction identique par exemple est segmentée $I([0,\ a])\subset[0,\ a]$ pour tout réel *a* positif mais n'est pas bornée. De même, la fonction carrée est segmentée (quel que soit *a* positif : $0\le x\le a\Rightarrow 0\le x^2\le a^2$, la définition d'une fonction segmentée est satisfaite avec $b=a^2$) mais elle n'est pas bornée.

3.e.ii. Vérifions les propriétés satisfaites dans l'ensemble **A**.

(P1). Les fonctions *u* et *v* sont nulles en zéro et strictement croissantes sur $[0,+\infty[$. Quel que soit *a* positif : $u([0,\ a])=\left[0,\ e^a-1\right]$ et $v([0,\ a])=[0,\ \ln(a+1)]$. Ces deux fonctions sont segmentées, elles appartiennent à **A**.

(P2). De façon évidente, toute fonction constante est bornée donc segmentée.

Soit *f* et *g* deux fonctions segmentées. Quel que soit le réel positif *a*, il existe deux réels positifs b_a et c_a tels que : $0\le x\le a\Rightarrow 0\le f(x)\le b_a$ et $0\le x\le a\Rightarrow 0\le g(x)\le c_a$.

Dans ce cas, quel que soit le réel positif a : $0\le x\le a\Rightarrow 0\le f(x)+g(x)\le b_a+c_a$ et $0\le x\le a\Rightarrow 0\le f(x)\times g(x)\le b_a\times c_a$. Les fonctions somme et produit de ces deux fonctions sont segmentées. **(P3)** et **(P6)** sont vérifiées.

Quel que soit le réel positif a : $0\le x\le a\Rightarrow 0\le g(x)\le c_a$. Soit $b_{c(a)}$ un réel positif tel que $0\le x\le c_a\Rightarrow 0\le f(x)\le b_{c(a)}$ (l'existence d'un tel réel est assurée car *f* est segmentée). Alors : $0\le x\le b_a\Rightarrow 0\le f\circ g(x)\le b_{c(a)}$. La fonction composée $f\circ g$ est segmentée. **(P4)** est vérifiée.

Supposons de plus que $f \geq g$. Quel que soit le réel *x*, $f(x) - g(x) \geq 0$. Notons aussi que, *g* est une fonction positive sur $[0, +\infty[$ (s'il existait un réel *c* d'image par *g* strictement négative, la propriété de segmentation ne pourrait être vérifiée pour les réels $a \geq c$), et donc que $f(x) - g(x) \leq f(x)$.
Alors, quel que soit le réel positif *a* : $0 \leq x \leq a \Rightarrow 0 \leq f(x) - g(x) \leq b_a$. La propriété **(P5)** est vérifiée.

L'ensemble des fonctions segmentées vérifie les six propriétés de **(P1)** à **(P6)**.

3.e.iii. Vérifions les propriétés satisfaites dans l'ensemble **B**. Notons que, les fonctions de **B** étant supposées segmentées, la propriété de segmentation sera acquise dans l'examen de toutes les propriétés. Il reste à vérifier que la fonction dont on s'occupe est nulle en zéro ou bornée.

(P1). Les fonctions *u* et *v* sont nulles en zéro donc appartiennent à **B**.

(P2). De façon évidente, toute fonction constante est bornée donc appartient à **B**.

La somme d'une fonction nulle en zéro et non bornée avec une fonction bornée n'est pas nécessairement nulle en zéro ou bornée donc la propriété **(P3)** n'est pas vérifiée (par exemple la fonction $x \mapsto x+1$ est une somme de deux fonctions de **B** qui n'appartient pas à **B**, elle n'est ni nulle en zéro ni bornée).

Soient désormais *f* et *g* deux fonctions de **B**. Elles sont donc segmentées et nulles en zéro ou bornées.

(P4). La composée de deux fonctions bornées est bornée. La composée de deux fonctions qui s'annulent en zéro s'annule en zéro. Examinons ce qu'il se passe lorsque l'une s'annule en zéro et l'autre est bornée.

Si *f* est bornée, alors $f \circ g$ est bornée quel que soit le comportement de *g*. Si *g* est bornée, l'image par *g* de $[0, +\infty[$ est contenue dans un intervalle $[0, a]$, et *f* étant segmentée, l'image par *f* de cet intervalle $[0, a]$ est contenue dans un intervalle $[0, b]$. La fonction $f \circ g$ est bornée.
(P4) est donc vérifiée quelles que soient les circonstances.

(P5). Supposons que $f \geq g$. Alors : $f \geq f - g \geq 0$. Si *f* est bornée, alors $f - g$ l'est aussi et si *f* s'annule en zéro, $f - g$ aussi. Dans les deux cas, $f - g$ appartient à **B**, **(P5)** est vérifiée.

(P6). Si au moins l'une des deux fonctions *f* ou *g* s'annule en zéro, leur produit aussi. Si aucune des deux ne s'annule en zéro, alors elles sont toutes les deux bornées et leur produit aussi. Quelles que soient les circonstances, le produit appartient à **B**. **(P6)** est vérifiée.

L'ensemble **B** vérifie cinq des six propriétés, mais non pas **(P3)**, la stabilité pour l'addition.

3.f. Nous venons de construire un ensemble de type **V** qui ne contient pas les fonctions polynomiales ne s'annulant pas en zéro (**B** ne contient pas les fonctions polynomiales dont le coefficient a_0 est strictement positif). Ainsi, une fonction polynomiale définie sur $[0 ; +\infty[$ et à valeurs dans $[0 ; +\infty[$ n'est pas nécessairement dans **V**.

Problème 2 : Les nombres joviaux

Dans ce problème, il est question d'étudier les décompositions possibles de 1 *en une somme de fractions unitaires distinctes (une « fraction unitaire » est une fraction dont le numérateur est égal à* 1*).*

Partie I : Quelques exemples

1. Soit p un entier jovial d'ordre n et $\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{p}=1$ la décomposition de 1 en somme de fractions unitaires associée à p.

Les inégalités entre nombres entiers $a_1 < a_2 < ... < a_n = p$ étant des inégalités strictes, pour tout indice k tel que $1 \leq k \leq n-1$, $a_{k+1} \geq a_k + 1$ et en conséquence, pour tout indice k tel que $2 \leq k \leq n$: $a_k \geq a_1 + (k-1) \geq 2 + (k-1) = k+1$.
En particulier, en considérant l'indice n : $p = a_n \geq n+1$, autrement dit $n \leq p-1$.

L'ordre d'un entier jovial est strictement inférieur à cet entier.

2. Pour tout couple d'entiers (a_1, a_2) tels que $2 \leq a_1 < a_2$; la double inégalité $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{a_1} > \frac{1}{a_2}$ implique, à propos de la somme de ces deux inverses que : $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2} < 1$.

Il n'existe pas de nombres joviaux d'ordre 2. Il n'en existe pas non plus d'ordre 1.

Puisqu'il n'existe pas d'entier jovial d'ordre 1, l'entier 2 n'est pas jovial. (L'entier 3 ne l'est pas non plus puisqu'il n'y a pas d'entier jovial ni d'ordre 1 ni d'ordre 2, mais nous verrons encore une autre raison pour laquelle il ne l'est pas).

Si l'entier 4 était jovial, son ordre devrait être 3. Or, l'unique combinaison possible de trois entiers tels que $2 \leq a_1 < a_2 < a_3 = 4$ est la combinaison $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 4$, combinaison qui donne : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12} \neq 1$.

L'entier 4 n'est pas jovial.

3. Remarquons qu'un nombre p est jovial si et seulement si il existe des entiers $2 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < p$ tels que : $\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Notons aussi que $\frac{p-1}{p}$ est la forme irréductible d'un rationnel, car tout couple d'entiers consécutifs $(p-1, p)$ est un couple d'entiers premiers entre eux (ils vérifient en effet la relation de Bézout : $p - (p-1) = 1$).

Soit p un nombre premier. Quels que soient les entiers tels que $2 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < p$, le nombre $\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}}$ est un rationnel dont une écriture est le quotient d'un entier (qu'il est inutile d'expliciter) par le produit $a_1 \times a_2 \times ... \times a_{n-1}$. Puisque tous les a_i sont strictement inférieurs au nombre premier p, ils sont tous premiers avec p et leur produit est lui aussi premier avec p. La forme irréductible de $\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}}$, quelle qu'elle soit, est nécessairement distincte de $\frac{p-1}{p}$.

Lorsque p est un nombre premier, quels que soient les entiers tels que $2 \le a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < p$, $\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} \neq \frac{p-1}{p}$: aucun nombre premier n'est jovial.

4. L'entier 6 est jovial car $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. C'est le plus petit entier jovial car 2 et 4 ne sont pas joviaux et 3 et 5, en tant que nombres premiers, ne le sont pas non plus.

5. Considérons un entier jovial d'ordre 3. Il existe trois entiers $2 \le a_1 < a_2 < a_3 = p$ tels que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$.

Or, pour tout triplet (b_1, b_2, b_3) d'entiers tels que $3 \le b_1 < b_2 < b_3$: $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < 1$.

L'entier a_1 ne peut pas être supérieur ou égal à 3. Nécessairement, $a_1 = 2$.

D'autre part, pour tout couple (b_2, b_3) d'entiers tels que $4 \le b_2 < b_3$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < 1$.

L'entier a_2 ne peut pas être supérieur ou égal à 4. Nécessairement, $a_2 = 3$.

Si $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$, alors nécessairement $a_3 = 6$: l'entier 6 est le seul nombre jovial d'ordre 3.

6. Si p est jovial d'ordre n, il existe des entiers $2 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = p$ tels que : $\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{p} = 1$.

En considérant les doubles des divers entiers a_i : $4 \leq 2a_1 < 2a_2 < ... < 2a_{n-1} < 2a_n = 2p$ et $\frac{1}{2a_1} + ... + \frac{1}{2a_{n-1}} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$.

Posons $b_1 = 2$ puis $b_i = 2a_{i-1}$ pour tout i tel que $2 \leq i \leq n+1$. Nous obtenons :
$2 = b_1 < b_2 < ... < b_n = a_{n-1} < b_{n+1} = 2p$ et $\frac{1}{b_1} + ... + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2p} = 1$.

L'entier $2p$ est jovial d'ordre $n+1$.

D'autre part, en remarquant que, pour tout entier strictement positif p : $\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p.(p+1)}$, la relation $\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{p} = 1$ s'écrit aussi bien : $\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)} = 1$.

Pour $p \geq 2$ (ce qui est le cas puisque p est supposé jovial) : $2 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < p+1 < p(p+1)$, une chaîne d'inégalités strictes est maintenue, les conditions de jovialité sont assurées.

L'entier $p(p+1)$ est jovial d'ordre $n+1$.

7. Si p et q sont joviaux d'ordres respectifs m et n, il existe des entiers $2 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = p$ et des entiers $2 \leq b_1 < b_2 < ... < b_{m-1} < b_m = q$ tels que $\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{p} = 1$ et $\frac{1}{b_1} + ... + \frac{1}{b_{m-1}} + \frac{1}{q} = 1$

Considérons alors l'expression : $\left(\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}}\right) + \frac{1}{p} \times \left(\frac{1}{b_1} + ... + \frac{1}{b_{m-1}} + \frac{1}{q}\right)$ obtenue en multipliant le terme $\frac{1}{p}$ de la décomposition de 1 en somme de fractions unitaires associée à p par la décomposition analogue associée à q.

Ceci revient à construire une suite strictement croissante d'entiers dont la somme des inverses est égale à 1 et dont le plus grand élément est le produit pq :
$c_1 = a_1 < c_2 = a_2 < ... < c_{n-1} = a_{n-1} < c_n = pb_1 < c_{n+1} = pb_2 < ... < c_{n+m-2} = p\,_{b_{m-1}} < c_{n+m-1} = pq$. Les conditions de jovialité sont toutes réunies.

Le produit pq est un nombre jovial d'ordre $m+n-1$

Exemples

Nous verrons plus loin que 20 est jovial d'ordre 4 et que 189 est jovial d'ordre 5.

La copie d'écran ci-contre atteste que leurs doubles sont des entiers joviaux, de même que les entiers $20\times 21=420$ et $189\times 190=35910$ et de même que le produit $20\times 189=3780$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{54}+\frac{1}{189}$ 1

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ 1

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{108}+\frac{1}{378}$ 1

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}$ 1

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{54}+\frac{1}{190}+\frac{1}{189\cdot 190}$ 1

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{21}+\frac{1}{420}$ 1

©gilbertjulia

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{54}+\frac{1}{378}+\frac{1}{756}+\frac{1}{945}+\frac{1}{3780}$ 1

8/99

Partie II : Deux suites d'entiers

1. Montrons par récurrence qu'à partir du rang 3, le nombre u_n est jovial.

Successivement, $u_1=1$; $u_2=2$; $u_3=6$. Le terme de rang 3 de la suite (u_n) est un nombre jovial de rang 3 (le seul de ce rang d'ailleurs), ce qui initialise au rang 3 la propriété « u_n est un nombre jovial d'ordre n ».

La question **II.6** a montré que, lorsqu'un entier p était jovial d'ordre n, alors l'entier $p(p+1)$ était lui aussi jovial et que son ordre était $n+1$. En particulier, si u_n est jovial d'ordre n, alors $u_n(u_n+1)$, c'est-à-dire u_{n+1}, est jovial d'ordre $n+1$. Ce qui démontre l'hérédité de la propriété en question.

Pour tout entier $n\geq 3$, u_n est un nombre jovial d'ordre n.

2. Notons qu'une relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n) est : $v_{n+1}=1+u_{n+1}=1+u_n(1+u_n)=1+(v_n-1)v_n=v_n^{\ 2}-v_n+1$.

Cette relation de récurrence $v_{n+1}=v_n^{\ 2}-v_n+1$ *qui exprime un terme de la suite v en fonction de son précédent, gardons-la en mémoire …*

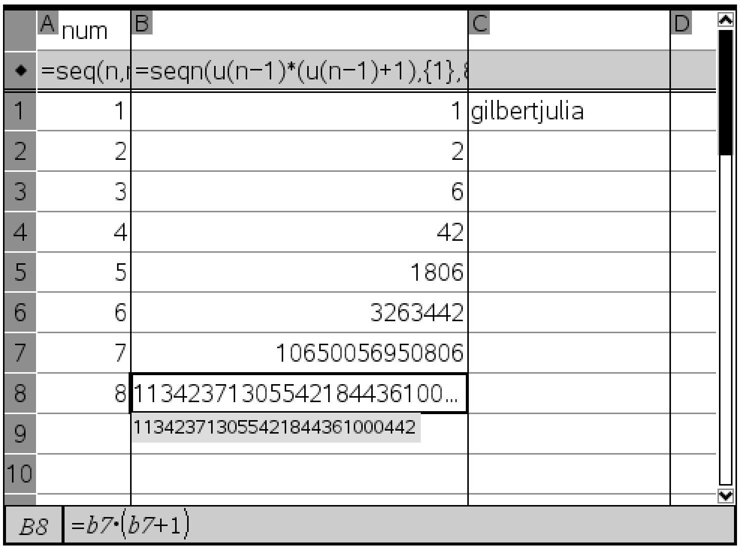
D'autre part, successivement : $v_1=1+u_1=2$; $v_2=1+u_2=3=v_1+1$; $v_3=1+u_3=7=v_1v_2+1$.

La relation $v_{n+1}=v_1\,v_2...v_n+1$ est vérifiée au rang 1 ainsi, accessoirement, qu'aux rangs 2 et 3.

Vérifions son hérédité. Supposons que, pour un certain rang, soit vérifiée la relation $v_n=v_1...v_{n-1}+1$, c'est-à-dire aussi bien : $v_n-1=v_1...v_{n-1}$. Alors au rang suivant : $v_{n+1}=1+(v_n-1)v_n=1+(v_1....v_{n-1})v_n=1+v_1...v_n$, la formule s'actualise correctement, elle est héréditaire.

Pour tout entier $n\geq 1$, $v_{n+1}=v_1\,v_2...v_n+1$.

Les premiers termes de la suite (u_n). Cette suite semble diverger très rapidement vers plus l'infini.



	A num	B	C	D
◆	=seq(n,r	=seqn(u(n−1)*(u(n−1)+1),{1},8		
1	1	1	gilbertjulia	
2	2	2		
3	3	6		
4	4	42		
5	5	1806		
6	6	3263442		
7	7	10650056950806		
8	8	113423713055421844361000...		
9		113423713055421844361000442		
10				

B8 $=b7\cdot(b7+1)$

Partie III : Un majorant optimal pour les nombres joviaux

1. Compte tenu que $v_1 = 2$ et $v_2 = 3$, la propriété H_1 s'énonce ainsi :

« Soit x_1 un nombre entier strictement positif et a est un nombre rationnel strictement positif tels que $x_1 \leq a$ et $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{a} = 1$. Alors $a + 1 \leq 3$ et $x_1(a+1) \leq 6$ ». Qu'en est-il exactement ?

Supposons que x_1 soit un nombre entier strictement positif et que a soit un nombre rationnel strictement positif tels que $x_1 \leq a$ et $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{a} = 1$

$x_1 \leq a \Rightarrow \frac{1}{x_1} \geq \frac{1}{a}$ et par conséquent : $1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{a}$.

Nous obtenons l'inégalité : $a \geq 2$ puis l'inégalité $a + 1 \geq 3$, c'est-à-dire apparemment l'inégalité de sens contraire à celle prévue par l'énoncé.

Cependant, l'entier x_1 s'exprime en fonction de a : $x_1 = \frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1}$.

L'hypothèse $a > 2$ est à rejeter car dans ce cas, $0 < \frac{1}{a-1} < 1$, ce nombre n'est pas un entier et le nombre $1 + \frac{1}{a-1}$ n'en est pas un non plus.

Il reste uniquement l'hypothèse $a = 2$, auquel cas $x_1 = 2$, et les inégalités larges conformes à celles de l'énoncé sont alors bel et bien vérifiées. La propriété H_1 est vraie.

2. Soit des entiers strictement positifs et un rationnel strictement positif a tels que : $x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq a$ et $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1$.

L'entier x_1 est nécessairement distinct de 1, car la relation $1 + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1$ est impossible à réaliser en nombres strictement positifs, vu que $\frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} > 0$. Donc $x_1 \geq 2$.

Le nombre rationnel $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}$ s'écrit sous la forme : $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{p_n}{x_1\, x_2 \ldots x_n}$ où p_n est un entier strictement positif car le produit $x_1\, x_2 \ldots x_n$ de ces entiers est un dénominateur commun à tous les $\frac{1}{x_i}$.

Exactement, $p_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} x_j \right)$.

De la relation : $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = \frac{p_n}{x_1\, x_2 \ldots x_n} + \frac{1}{a} = 1$, on déduit que : $\frac{x_1\, x_2 \ldots x_n}{a} = x_1\, x_2 \ldots x_n - p_n$.

Le quotient $\frac{x_1\, x_2 \ldots x_n}{a}$ étant un nombre entier, a divise le produit $x_1\, x_2 \ldots x_n$ et, en tant que diviseur de ce nombre, il lui est inférieur ou égal : $a \leq x_1\, x_2 \ldots x_n$.

NB. À partir de maintenant on considère $(n-1)$ nombres entiers tels que $2 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1}$ et $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} < 1$.

On suppose en outre que la propriété H_{n-1} est vraie. Selon cette hypothèse, si b est un nombre rationnel vérifiant $x_{n-1} \leq b$ et $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{b} = 1$, alors : $b + 1 \leq v_n$ (autrement dit $b \leq u_n$) et $b \leq x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$.

À ces données viennent se greffer un nouveau nombre entier noté x_n ainsi qu'un nombre rationnel a vérifiant la double inégalité $x_{n-1} \leq x_n \leq a$ et l'égalité $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a} = 1$.

Toutes ces hypothèses sont énoncées une fois pour toutes, nous ne les répèterons pas.

*Les questions **3**, **4**, et **5** étudient plusieurs cas de figure. Il s'agira de s'intéresser à l'expression $\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} \right)$ et à ce qu'il se passe quand on lui ajoute le nombre $\frac{1}{x_n - 1}$.*

*Que se passe-t-il si on dépasse 1 comme dans les questions **3** et **4** qui suivent, que se passe-t-il si on reste en deçà comme dans la question **5** ?*

3. On suppose dans cette question que $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n-1}\geq 1$ et que $x_n > x_{n-1}$.

3.a. Posons : $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n-1}=1+r$ où r est par construction un nombre rationnel unique positif ou nul, puis définissons le nombre q par la relation : $\frac{1}{q}=\frac{1}{x_n-1}-r$.

C'est-à-dire que nous avons : $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{q}=1$.

Par hypothèse $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{a}=1$, ainsi nous disposons de la relation : $\frac{1}{q}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{a}=\frac{1}{x_n-1}-r$

Le nombre q est rationnel car cocktail de nombres rationnels. Il est strictement positif car $\frac{1}{x_n}+.\frac{1}{a}>0$. Il est unique car déterminé par x_n et par a.

3.b. Puisque $\frac{1}{q}=\frac{1}{x_n-1}-r$ et que r est positif ou nul : $\frac{1}{q}\leq\frac{1}{x_n-1}$, autrement dit $x_n-1\leq q$.

Dans cette question, l'entier x_{n-1} est supposé être tel que $x_{n-1}<x_n$ (inégalité stricte). L'entier x_{n-1} est donc inférieur ou égal au nombre entier précédent immédiatement l'entier x_n : $x_{n-1}\leq x_n-1$.

On en déduit l'inégalité $x_{n-1}\leq x_n-1\leq q$.

3.c. Du fait de l'inégalité $x_{n-1}\leq q$, le nombre rationnel q et la suite d'entiers $(x_1,...x_{n-1})$ vérifient toutes les hypothèses de la propriété H_{n-1}, nous pouvons en appliquer les conclusions :

- D'abord le fait que $q+1\leq v_n$, ce qui répond à la première partie de cette question.
- Ensuite le fait que $x_1....x_{n-1}(q+1)\leq v_1...v_n$. L'inégalité $x_n-1\leq q$ implique alors que $x_1....x_{n-1}\,x_n\leq x_1....x_{n-1}(q+1)\leq v_1...v_n$ $x_1....x_{n-1}\,x_n\leq v_1...v_n$ ce qui répond à la deuxième partie de cette question.

3.d. La relation $\frac{1}{q}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{a}=\frac{1}{x_n-1}-r$ et l'inégalité $r\geq 0$ impliquent que $\frac{1}{x_n}+\frac{1}{a}\geq\frac{1}{x_n-1}$, autrement dit que $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{x_n-1}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_n(x_n-1)}$.

Cette inégalité est équivalente à l'inégalité : $a\leq x_n(x_n-1)$.

D'après la question **3.b**, $x_n \le q+1$ et d'après la question **3.c** : $q+1 \le v_n$.

Donc $a \le (q+1)\times q \le v_n\,(v_n - 1)$ ou, ce qui revient au même, $a+1 \le (q+1)\times q + 1 \le v_n\,(v_n-1)+1$.

Nous retrouvons dans cette dernière expression la relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n), à savoir la relation $v_{n+1} = v_n\,(v_n-1)+1$ que nous avons vue en **II.2**.

En conclusion : $a+1 \le v_{n+1}$.

L'inégalité $x_1....x_{n-1}\,x_n \le v_1...v_n$ vue en **3.c** implique alors que $x_1....x_{n-1}\,x_n\,(a+1) \le v_1...v_n v_{n+1}$.

Tout ceci montre que la propriété H_n est héréditaire dans ce cas de figure.

4. On suppose dans cette question que $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n-1} \ge 1$ et que $x_n = x_{n-1}$.

Nous poserons chaque fois que cela aura une quelconque utilité : $x_n = x_{n-1} = x$ pour minimiser les notations.

Avec ces notations minimisées, le cas de figure supposé est que : $\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n-2}}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1} \ge 1$.

4.a. Par hypothèse, il existe un rationnel strictement positif a tel que $\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n-2}}\right)+\frac{2}{x}+\frac{1}{a}=1$.

- x ne peut être égal à 2 car dans ce cas $\frac{2}{x}=1$, l'inégalité précédente ne peut avoir lieu (il est nécessaire que . $\frac{2}{x}<1$ pour rendre possible l'existence de a).
- Supposons que $x=3$. Nous avons : $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}$. Alors d'une part $\left(\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{n-2}}\right)+\frac{2}{3}+\frac{1}{a}=1$ et d'autre part $\left(\frac{1}{x_1}+...\frac{1}{x_{n-2}}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{x_1}+...\frac{1}{x_{n-2}}\right)+\frac{5}{6}\ge 1$. On en déduit que $\frac{1}{3}>\frac{1}{3}-\frac{1}{a}\ge\left(\frac{1}{x_1}+...\frac{1}{x_{n-2}}\right)\ge\frac{1}{6}$.

L'inégalité $\left(\frac{1}{x_1}+...\frac{1}{x_{n-2}}\right)\ge\frac{1}{6}$ présume de l'existence d'au moins un terme x_i précédant x_{n-1}, mais l'inégalité stricte $\frac{1}{3}>\left(\frac{1}{x_1}+...\frac{1}{x_{n-2}}\right)$ est incompatible avec cette existence car tout terme x_i précédant x_{n-1}, est nécessairement égal à 2 ou à 3, puisque la suite des entiers x_i est une suite croissante et dans ce cas $\frac{1}{x_1}+...\frac{1}{x_{n-2}}\ge\frac{1}{3}$. L'hypothèse $x=3$ aboutit à une impasse, elle est aussi à rejeter.

Forcément, $x = x_n \ge 4$.

4.b. Considérons pour $x > 2$ la fonction *f* définie par : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$.

Il s'agit d'une fonction rationnelle qui s'exprime de façon équivalente ainsi : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x(x-1)(x-2)}$ et qui se factorise ainsi : $f(x) = \frac{(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})}{x(x-1)(x-2)}$. Cette fonction est strictement positive sur l'intervalle $]2+\sqrt{2},\ +\infty[$ (l'expression au second degré $x^2 - 4x + 2$ y est strictement positive, de même que le quotient $\frac{(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})}{x(x-1)(x-2)}$).

Nous avons vu en **4.a** que l'entier $x = x_n$ est au moins égal à 4, donc appartient à cet intervalle. Par conséquent, le nombre $f(x_n) = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_n - 2}$ est strictement positif et, en tant que cocktail de nombres rationnels, c'est aussi un rationnel. Il en est de même de son inverse, $r = \frac{1}{f(x_n)}$, unique nombre qui vérifie la relation : $\frac{1}{r} + \frac{1}{x_n - 2} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1}$.

Par ailleurs (rappelons que nous posons dans ce contexte : $x = x_n = x_{n-1}$) :

- Il existe par hypothèse un rationnel strictement positif *a* tel que : $\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}}\right) + \frac{2}{x} + \frac{1}{a} = 1$.
- L'inégalité $\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}}\right) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \geq 1$ implique l'existence d'un rationnel *s* positif ou nul tel que $\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) = 1 + s$.
- En exploitant la définition du rationnel r : $\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}}\right) + \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{r}\right) = 1 + s$, relation que l'on peut écrire aussi bien : $\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}}\right) + \frac{1}{x-2} + \left(\frac{1}{r} - s\right) = 1$.

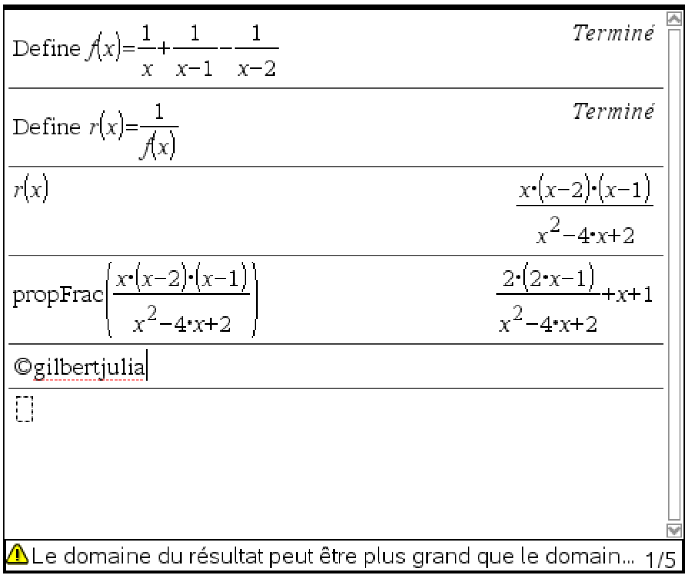
On obtient en particulier la relation : $\frac{2}{x} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{r} - s$, c'est-à-dire : $\frac{x-4}{x(x-2)} + \frac{1}{a} = \frac{1}{r} - s$.

Nous avons démontré que $x = x_n \geq 4$, donc $\frac{x-4}{x(x-2)} + \frac{1}{a} > 0$. Le nombre $\frac{1}{r} - s$ est un rationnel strictement positif. Il en est de même de son inverse. Soit *t* cet inverse, défini par : $t = \frac{1}{\frac{1}{r} - s}$.

Nous obtenons la propriété suivante : « Il existe un rationnel strictement positif *t* tel que : $\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}}\right) + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{t} = 1$ ». Soit, en reprenant la notation indexée : $\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}}\right) + \frac{1}{x_n - 2} + \frac{1}{t} = 1$.

4.c. Reprenons la fonction f qui a été définie à la question **4.b**. Plaçons-nous sur l'intervalle $[4,\ +\infty[$, intervalle utile ici et où f est strictement positive, et considérons le lien entre le nombre rationnel r et cette fonction, à savoir que $r = \dfrac{1}{f(x_n)}$.

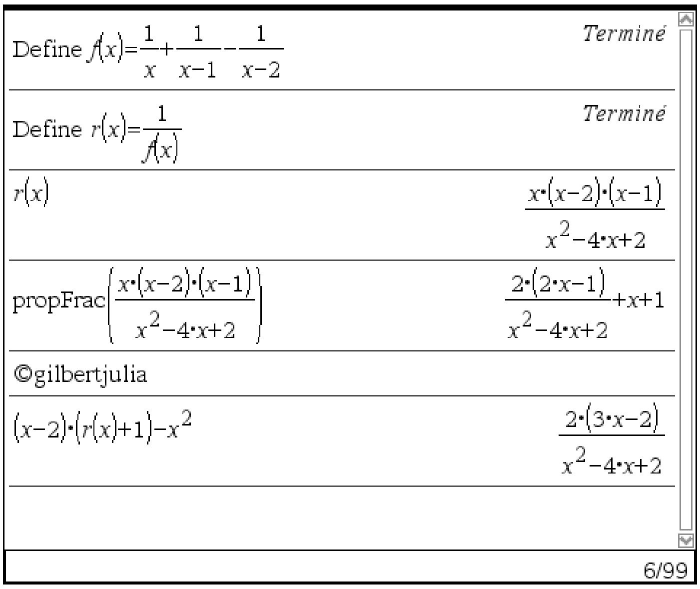
La fonction inverse multiplicative de la fonction f est la fonction définie sur par $r(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{x^2-4x+2}$.



L'expression $r(x) = x+1+\dfrac{4x-2}{x^2-4x+2}$ en est une forme décomposée équivalente.

Ceci justifie que :

$$r = \frac{1}{f(x_n)} = x_n + 1 + \frac{4x_n - 2}{{x_n}^2 - 4x_n + 2}.$$



$(x-2)(r(x)+1)-x^2 = \dfrac{2(3x-2)}{x^2-4x+2}$, expression qui est du signe de $(3x-2)$, donc strictement positive, sur l'intervalle $[4,\ +\infty[$.

Ceci démontre : $(x_n-2)(r+1)-{x_n}^2 > 0$ ou ce qui revient au même $(x_n-2)(r+1) > {x_n}^2$.

4.d. Pour tout x de $[4,\ +\infty[$, $r(x)-x = \dfrac{x^2}{x^2-4x+2}$, expression strictement positive sur $[4,\ +\infty[$.

Ceci démontre l'inégalité $r - x_n > 0$ ou ce qui revient au même $r > x_n$.

La relation entre t, r et s que nous avons établie : $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{r} - s$ et le fait que s soit positif ou nul implique que $\dfrac{1}{t} \le \dfrac{1}{r}$, autrement dit que $t \ge r$. Finalement : $t \ge r > x_n$.

4.e. Les $(n-1)$ nombres entiers $x_1,....,x_{n-2},x_n-2$ (peu importe où se range x_n-2 parmi ces entiers) et le rationnel *t*, qui est plus grand qu'eux tous, vérifient les hypothèses de la propriété H_{n-1}.

Nous pouvons en appliquer les conclusions : $t+1\le v_n$ et $x_1...x_{n-2}\,(x_n-2)(t+1)\le v_1...v_n$.

Examinons par maintenant les relations entre les rationnels *a, r* et *t*.

(Ne perdons pas de vue : $x=x_n=x_{n-1}$. Ne perdons pas de vue non plus le rangement $v_n-1\ge t\ge r>x=x_n$).

Nous avons trois relations :

- $\left(\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-2}}\right)+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{t}=1$
- $\left(\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-2}}\right)+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{a}=1$
- $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{r}$

Nous pouvons en déduire celle-ci : $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{t}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{t}$.

Puis celle-là : $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{t}$.

Nous avons vu que $t\ge r>x$, donc $\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{r}\le 0$ et en conséquence $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{x(x-1)}$ puis : $a\le x(x-1)$.

Si $a\le x(x-1)$, alors *a fortiori* : $a\le t(t-1)$.

Nous avons vu ci-dessus que $t+1\le v_n$. D'où une majoration de $(a+1)$: $a+1\le t(t-1)+1\le(v_n-1)(v_n-2)+1<v_n(v_n-1)+1$.

Nous reconnaissons dans le membre de droite de cette inégalité la relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n). Nous obtenons ainsi : $a+1\le v_{n+1}$ (inégalité stricte inutile).

Exploitons maintenant l'inégalité : $x_1...x_{n-2}\,(x-2)(t+1)\le v_1...v_n$, en utilisant l'inégalité $(x_n-2)(r+1)>{x_n}^2$ vue en **4.c**. Nous avons : $x_1...x_{n-2}\,x^2\le x_1...x_{n-2}(x-2)(r+1)\le x_1...x_{n-2}\,(x-2)(t+1)\le v_1...v_n$ et en conséquence : $\left(x_1...x_{n-2}\,x^2\right)(a+1)\le(v_1...v_n)\,v_{n+1}$.

Ce qui, en revenant aux écritures indexées, s'écrit : $\left(x_1...x_{n-2}\,x_{n-1}x_n\right)(a+1)\le(v_1...v_n)v_{n+1}$.

Nous pouvons en déduire que (H_n) est héréditaire dans ce cas de figure, c'est-à-dire finalement quelles que soient les circonstances où $\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{x_n-1}\ge 1$

5. On suppose dans cette question que $\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{x_n-1}<1$

Il s'agit là du deuxième cas de figure qui peut se présenter, concernant la position par rapport à 1 *du nombre* $\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{x_n-1}$ *(soit ce nombre est plus grand que* 1*, ce qui a été étudié aux questions **3** et **4**, soit il est strictement plus petit, ce qui nous intéresse maintenant).*

5.a. Le nombre b est l'inverse de la différence $1-\left(\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{x_n-1}\right)$ qui est strictement positive et rationnelle (cocktail de rationnels).

5.b. $\left(\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)+\dfrac{1}{x_n-1}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)+\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{a}=1$ et donc $\dfrac{1}{x_n-1}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{a}$.

Posons : $c=1-\left(\dfrac{1}{x_1}+...+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)$ de sorte que : $\dfrac{1}{x_n-1}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{a}=c$.

Nous savons que $x_n-1<x_n\leq a$ de sorte que $\dfrac{1}{x_n-1}>\dfrac{1}{x_n}\geq\dfrac{1}{a}$. Puisque les sommes $\dfrac{1}{x_n-1}+\dfrac{1}{b}$ et $\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{a}$ sont égales, $\dfrac{1}{x_n-1}>\dfrac{1}{x_n}\geq\dfrac{c}{2}\geq\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ et inversement on obtient le rangement $b>a\geq\dfrac{2}{c}\geq x_n>x_n-1$.

Puisque $b>a$, $b(b+1)>a(a+1)$ et $\dfrac{1}{x_n-1}-\dfrac{1}{b+1}=\dfrac{1}{x_n-1}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b(b+1)}\leq\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a(a+1)}=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{a+1}$.

Donc : $\dfrac{b+2-x_n}{(x_n-1)(b+1)}\leq\dfrac{a+1-x_n}{x_n(a+1)}$ $\dfrac{b+2-x_n}{(x_n-1)(b+1)}\leq\dfrac{a+1-x_n}{x_n(a+1)}$.

Si cette inégalité est vérifiée, *a fortiori*, puisque $a+1-x_n\leq b+2-x_n$, celle-ci l'est aussi : $\dfrac{a+1-x_n}{(x_n-1)(b+1)}\leq\dfrac{a+1-x_n}{x_n(a+1)}$.

En conséquence, $\dfrac{1}{(x_n-1)(b+1)}\leq\dfrac{1}{x_n(a+1)}$ et finalement, $x_n(a+1)\leq(x_n-1)(b+1)$.

Remarquons que si cette inégalité est vérifiée, alors : $a+1\leq\left(\dfrac{x_n-1}{x_n}\right)(b+1)<b+1$.

6. Résoudre cette question revient à justifier que la proposition (H_n) est encore héréditaire sous les hypothèses de la question **5**, puisqu'elle est déjà héréditaire sous les hypothèses des questions **3** et **4**.

Sous les hypothèses de la question **5**, remplaçons a par b et x_n par $x'_n = x_n - 1$.

Nous avons l'égalité : $1 + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x'_n} + \frac{1}{b} = 1$.

Nous avons aussi : $1 + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x'_n - 1} = \left(1 + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_{n-1}}\right) + \frac{1}{x_n - 2} > \left(1 + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_{n-1}}\right) + \frac{1}{x_n - 1}$.

De deux choses l'une :

Cas 1. Ou bien ce nombre $1 + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x'_n - 1}$ est supérieur ou égal à 1. Alors nous nous trouvons dans la situation des questions **3** ou **4** et nous pouvons en appliquer les conclusions : $b + 1 \leq v_{n+1}$ ce qui va impliquer $a + 1 \leq b + 1 \leq v_{n+1}$ et aussi $(x_1 ... x_{n-2}\, x_{n-1})[(x_n - 1)(b+1)] \leq v_1 ... v_n\, v_{n+1}$ ce qui va impliquer $(x_1 ... x_{n-2}\, x_{n-1})[x_n (a+1)] \leq v_1 ... v_n\, v_{n+1}$, c'est-à-dire finalement les deux inégalités voulues.

Cas 2. Ou bien ce nombre $1 + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x'_n - 1}$ est encore strictement inférieur à 1. Dans ce cas, nous allons itérer le remplacement. Il existe un rationnel strictement positif b_2 tel que : $\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 2} + \frac{1}{b_2} = 1$, rationnel qui vérifie conformément au résultat du **5.b** l'inégalité $(x_n - 2) b_2 \geq (x_n - 1) b$, et donc *a fortiori* $b_2 + 1 > b + 1$. Ou bien $\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 2} \geq 1$ et nous sommes dans la situation **3** ou **4**, ou bien nous itérons. Au bout d'un nombre fini d'itérations de ce genre, nous finirons par obtenir un b_k tel que $\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - k} \geq 1$ pour lequel les conclusions **3** et **4** s'appliquent et de proche en proche nous remonterons jusqu'aux deux inégalités voulues.

La propriété (**H**$_n$) est héréditaire dans tous les cas de figure, elle est héréditaire tout court. Elle est initialisée au rang 1 en vertu de la question **1**, elle est donc vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

7. Soit p un nombre jovial d'ordre n. Il existe une suite d'entiers tels que :

$2 \leq x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = p$ et $\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{p} = 1$. La suite $(x_1, ..., x_{n-1})$ et le nombre « rationnel » p (en fait, c'est dans ce contexte un entier) vérifient les hypothèses de la propriété (H_{n-1}). En vertu de cette propriété : $p + 1 \leq v_n$, autrement dit : $p \leq v_n - 1 = u_n$.

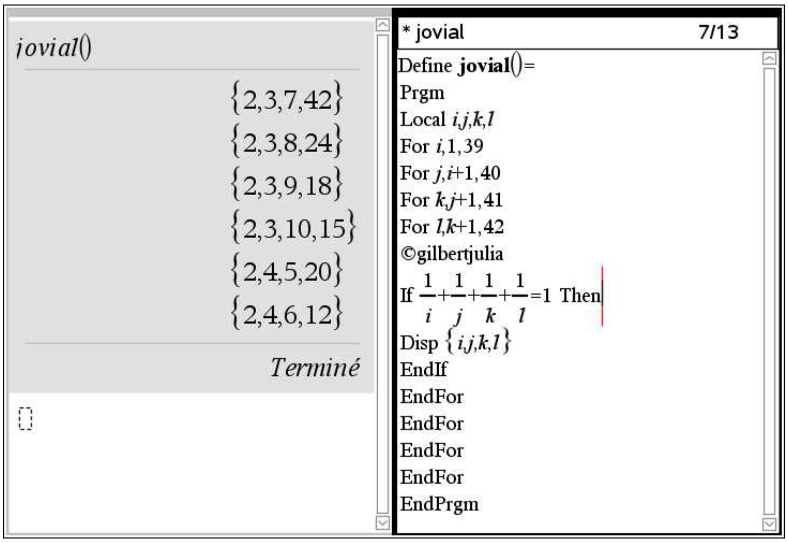
Tout nombre jovial d'ordre n est inférieur ou égal à u_n.

Or nous avons vu que u_n était lui-même un nombre jovial d'ordre n. Il s'agit du plus grand des nombres joviaux d'ordre n.

Complément : Des algorithmes pour obtenir les nombres joviaux d'ordre 4 puis les nombres joviaux d'ordre 5 puis quelques-uns d'ordre 6

Le programme **jovial** recherche systématiquement tous les nombres joviaux d'ordre 4. Il affiche pour chacun sa liste des nombres a_i.

Nous trouvons six nombres. Les nombres 12, 15, 18, 20, 24, 42 sont joviaux d'ordre 4.

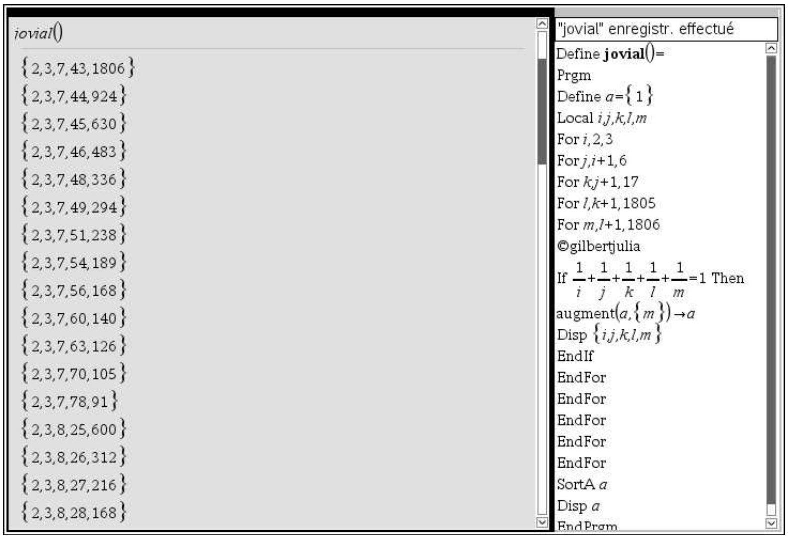


Cherchons maintenant les nombres joviaux d'ordre 5, en remarquant, pour minimiser les investigations, que :

- L'entier x_1 ne peut prendre que les valeurs 2 ou 3.
- L'entier x_2 ne peut prendre que des valeurs inférieures ou égales à 6 car $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<1$.
- L'entier x_3 ne peut prendre que des valeurs inférieures ou égales à 17 car $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}<1$.

Le programme **jovial** a été modifié pour rechercher les nombres joviaux d'ordre 5 et afficher leur liste des nombres a_i.

1806 comme prévu, 924, 630 par exemple sont joviaux d'ordre 5.



La liste complète des nombres joviaux d'ordre 5 donnée par la calculatrice semble être la suivante :

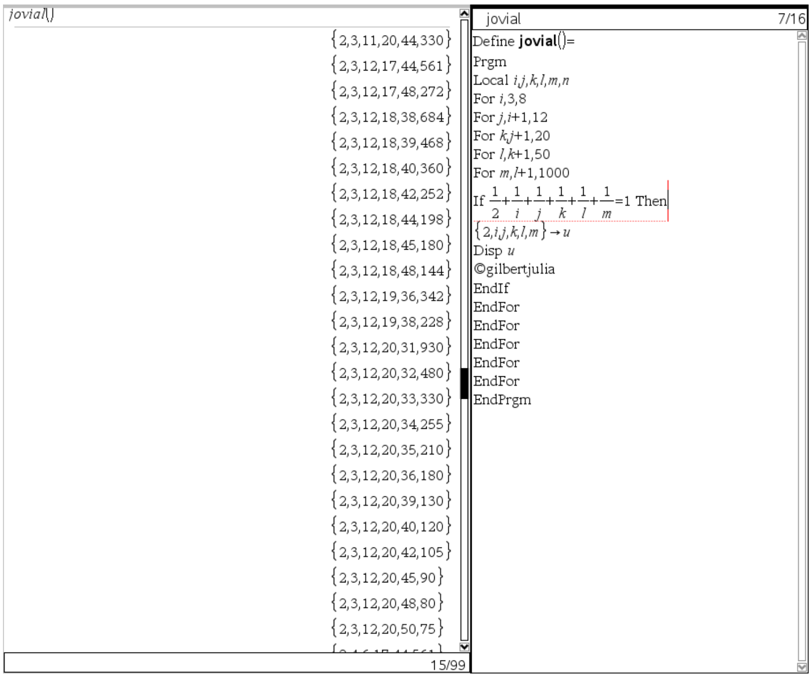
{15 ; 18 ; 20 ; 20 ; 24 ; 28 ; 28 ; 28 ; 30 ; 30 ; 30 ; 33 ; 35 ; 36 ; 36 ; 40 ; 40 ; 42 ; 45 ; 45 ; 45 ; 48 ; 48 ; 54 ; 56 ; 60 ; 60 ; 60 ; 60 ; 60 ; 70 ; 72 ; 72 ; 72 ; 84 ; 84 ; 88 ; 90 ; 91 ; 96 ; 99 ; 100 ; 105 ; 110 ; 120 ; 120 ; 120 ; 126 ; 126 ; 140 ; 140 ; 156 ; 156 ; 168 ; 168 ; 180 ; 189 ; 216 ; 220 ; 231 ; 238 ; 240 ; 294 ; 312 ; 336 ; 342 ; 420 ; 483 ; 600 ; 630 ; 924 ; 1806}.

Certains entiers apparaissent plusieurs fois dans cette liste, ce qui signifie qu'il existe plusieurs décompositions de 1 en somme d'inverses de nombres dont le plus grand est cet entier.

Notons que les entiers 15, 20, 28 et 42 sont à la fois joviaux d'ordre 4 et joviaux d'ordre 5.

Sans avoir la prétention d'obtenir tous les nombres joviaux d'ordre 6, il est possible d'en trouver quelques-uns. Ci-contre, quelques nombres joviaux d'ordre 6 inférieurs à 1000 et pour lesquels $a_1 = 2$.

Nous retrouvons des vieilles connaissances, comme 90, 105 ou 120, mais aussi un lot de nouveaux nombres joviaux. Certes, il y en a beaucoup d'autres.



Problème 3 : Plus d'une chance sur deux pour tout le monde

Dans l'ensemble des nombres réels, si x est plus grand que y et si y est plus grand que z, nous pouvons affirmer qu'alors x est plus grand que z (propriété de transitivité de la relation >). Le monde des variables aléatoires définies sur un même univers est parfois un peu plus paradoxal. Si X est plus souvent plus grand que Y, et si Y est plus souvent plus grand que Z, nous aurions tendance à conclure qu'alors X est plus souvent plus grand que Z. Cet exercice iconoclaste est là pour nous montrer qu'il n'en est rien. La relation « être plus souvent plus grand que … » n'est pas une relation transitive. Les variables aléatoires définies sur un même univers ne peuvent pas être ordonnées grâce à elle.

Partie I : Des urnes et des dés

1. Considérons l'expérience consistant à effectuer un tirage de deux jetons l'un de l'urne A, l'autre de l'urne B. Cette expérience peut être modélisée par l'univers à 16 éléments $\{12, 10, 3, 1\}\times\{9, 8, 7, 2\}$ muni de l'équiprobabilité.

Un tableau à double entrée permet de représenter cet ensemble, chaque cellule en représentant un élément. Dans les cellules de ce tableau, on considère la réalisation ou non de l'évènement « $X_A > X_B$ », l'inscription « 1 » marquant sa réalisation et l'inscription « 0 » sa non réalisation.

Urne A→ Urne B ↓	12	10	3	1
9	1	1	0	0
8	1	1	0	0
7	1	1	0	0
2	1	1	1	0

L'évènement « $X_A > X_B$ » contient 9 éventualités, sa probabilité est égale à $\frac{9}{16}$.

Considérons de même l'expérience consistant à effectuer un tirage de deux jetons l'un de l'urne B, l'autre de l'urne C, modélisée par l'univers à 16 éléments $\{9, 8, 7, 2\}\times\{11, 6, 5, 4\}$ muni de l'équiprobabilité.
Un tableau à double entrée représente cet ensemble. Dans les cellules de ce tableau, on considère la réalisation ou non de l'évènement « $X_B > X_C$ ».

Urne B→ Urne C ↓	9	8	7	2
11	0	0	0	0
6	1	1	1	0
5	1	1	1	0
4	1	1	1	0

L'évènement « $X_B > X_C$ » contient 9 éventualités, sa probabilité est égale à $\frac{9}{16}$.

Procédons de même pour les urnes C et A en considérant l'évènement « $X_C > X_A$ » :

Urne C→ Urne A ↓	11	6	5	4
12	0	0	0	0
10	1	0	0	0
3	1	1	1	1
1	1	1	1	1

L'évènement « $X_C > X_A$ » contient 9 éventualités, sa probabilité est elle aussi égale à $\frac{9}{16}$.

2.a. Les lois de probabilité des trois variables aléatoires sont les suivantes :

Valeurs x_1 de X_1	3	6
Probabilités	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Valeurs x_2 de X_2	2	5
Probabilités	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Valeurs x_3 de X_3	1	4
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

L'évènement « $X_1 > X_2$ » est l'évènement $(X_1 = 6) \cup [(X_1 = 3) \cap (X_2 = 2)]$ et sa probabilité est : $P(X_1 > X_2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$.

L'évènement « $X_2 > X_3$ » est l'évènement $(X_2 = 5) \cup [(X_2 = 2) \cap (X_3 = 1)]$ et sa probabilité est : $P(X_2 > X_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$.

L'évènement « $X_3 > X_1$ » est l'évènement $(X_3 = 4) \cap (X_1 = 3)$ et sa probabilité est : $P(X_3 > X_1) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

2.b. Une stratégie favorable pour Claire est de laisser Paul choisir son dé. S'il choisit le dé 1, elle prendra le dé 3 ; s'il choisit le dé 2, elle prendra le dé 1 ; s'il choisit le dé 3, elle prendra le dé 2. Ainsi elle aura, quel que soit le choix de Paul, « plus d'une chance sur deux » de gagner.

2.c. Paul a intérêt à choisir le dé 2. En effet, si Claire a étudié mathématiquement la situation (ce qui est le plus probable …), elle prendra le dé 1 et si par un heureux hasard pour Paul elle n'a pas étudié mathématiquement la situation, elle prendra indifféremment le dé 1 ou le dé 3 ; l'alternative semble un peu plus favorable à Paul que s'il avait choisi le dé 1.

2.d. Appelons S_i la somme des numéros obtenus en lançant deux fois de suite le dé numéro i.

Valeurs s_1 de S_1	6	9	12
Probabilités	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Valeurs s_2 de S_2	4	7	10
Probabilités	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Valeurs s_3 de S_3	2	5	8
Probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

L'évènement « $S_1 > S_2$ » est l'évènement $(S_1 = 12) \cup \left[(S_1 = 9) \cap \overline{(S_2 = 10)}\right] \cup \left[(S_1 = 6) \cap (S_2 = 4)\right]$ et sa probabilité est : $P(S_1 > S_2) = \frac{1}{36} + \frac{10}{36} \times \frac{3}{4} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{4} = \frac{59}{144}$. Curieusement, elle est plus petite que $\frac{1}{2}$. La probabilité de l'évènement contraire est plus grande que $\frac{1}{2}$: $P(S_2 > S_1) = 1 - \frac{59}{144} = \frac{85}{144}$.

NB. Voici une autre idée reçue qui vole en éclats. Si X est plus souvent plus grand que Y, nous pourrions penser qu'alors une somme $X_1 + X_2$ de variables aléatoires égales à X est plus souvent plus grande qu'une somme $Y_1 + Y_2$ de variables aléatoires égales à Y. Que nenni !

L'évènement « $S_2 > S_3$ » est l'évènement $(S_2 = 10) \cup \left[(S_2 = 7) \cap \overline{(S_3 = 8)}\right] \cup \left[(S_2 = 4) \cap (S_3 = 2)\right]$ et sa probabilité est : $P(S_2 > S_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{11}{36} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{36} = \frac{59}{144}$, le même résultat que ci-dessus. La probabilité de l'évènement contraire est : $P(S_3 > S_2) = \frac{85}{144}$.

Dans le cas où Paul choisit le dé numéro 2, Claire a intérêt à choisir le dé numéro 3.

L'évènement « $S_3 > S_1$ » est l'évènement $\left[(S_3 = 8) \cap (S_1 = 6)\right]$ et sa probabilité est : $P(S_3 > S_1) = \left(\frac{25}{36}\right)^2 = \frac{625}{1296}$. Elle est elle aussi plus petite que $\frac{1}{2}$. La probabilité de l'évènement contraire est plus grande que $\frac{1}{2}$: $P(S_1 > S_3) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$.

Dans cette situation, nous observons aussi une non transitivité. Claire a toujours intérêt à laisser Paul choisir le dé en premier. Si Paul choisit le dé 3, Claire choisira le dé 1 ; si Paul choisit le dé 1, Claire choisira le dé 2.

En résumé, en cas de transitivité, une des urnes est plus favorable que les deux autres, un joueur a intérêt à choisir en premier et à choisir cette urne-là. En cas de non transitivité, au contraire, un joueur a intérêt à laisser son adversaire choisir en premier et à adapter sa stratégie en fonction de l'urne que son adversaire a choisie.

Partie II : La suite de Fibonacci et des urnes

1. *Démonstration par récurrence. La récurrence porte sur deux rangs consécutifs.*

$F_2 = 1$ et $F_3 = 2$. Compte tenu de ces valeurs, $F_3 = 2F_2$ (la double inégalité stricte à démontrer n'est pas vérifiée lorsque $n = 2$)

Aux deux rangs suivants : $F_4 = 3$ et $F_5 = 5$. Compte tenu de ces valeurs, $\sqrt{2}\,F_3 = 2\sqrt{2} < F_4 = 3 < 2F_3 = 4$ et $\sqrt{2}\,F_4 = 3\sqrt{2} < F_5 = 5 < 2F_3 = 6$. La double inégalité stricte à démontrer est vérifiée aux rangs 3 et 4.

Supposons que l'inégalité à démontrer soit vérifiée pour deux rangs consécutifs $n-1$ et n, c'est-à-dire que $\sqrt{2}\,F_{n-1} < F_n < 2F_{n-1}$ et $\sqrt{2}\,F_n < F_{n+1} < 2F_n$.

Par addition membre à membre : $\sqrt{2}\left(F_{n-1} + F_n\right) < F_n + F_{n+1} < 2\left(F_{n-1} + F_n\right)$ et compte tenu de la relation de récurrence : $\sqrt{2}\,F_{n+1} < F_{n+2} < 2F_{n+1}$.

Si la double inégalité à démontrer est vérifiée pour deux rangs consécutifs $n-1$ et n, alors elle est vérifiée pour les deux rangs consécutifs n et $n+1$. Elle l'est pour les rangs consécutifs 3 et 4 : Cette inégalité est vérifiée pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

Notons pour la question suivante que pour tout entier $n \geq 3$ cette double inégalité est équivalente à : $\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{F_n}{F_{n+1}} > \frac{1}{2}$.

2.a. D'après la répartition proposée :

- X_A prend les valeurs de $3F_k - F_{k-2} + 1$ à $3F_k$ ainsi que les valeurs de $F_{k-2} + 1$ à $F_{k-2} + F_{k-1}$.
- X_B prend les valeurs de $2F_k + 1$ à $3F_k - F_{k-2}$ ainsi que les valeurs de 1 à F_{k-2}.
- X_C prend les valeurs de $F_k + 1$ à $2F_k$.

« $X_A > X_B$ » est l'évènement $\left(X_A > 3F_k - F_{k-2}\right) \cup \left[\left(F_{k-2} < X_A \leq F_{k-2} + F_{k-1}\right) \cap \left(X_B \leq F_{k-2}\right)\right]$ et sa probabilité est : $P\left(X_A > X_B\right) = \frac{F_{k-2}}{F_k} + \frac{F_{k-1}}{F_k} \times \frac{F_{k-2}}{F_k}$.

Cette probabilité s'exprime en fonction de deux des termes de la suite de Fibonacci : $P\left(X_A > X_B\right) = \frac{\left(F_k - F_{k-1}\right)}{F_k} + \frac{F_{k-1}}{F_k} \times \frac{\left(F_k - F_{k-1}\right)}{F_k} = 1 - \frac{F_{k-1}}{F_k} + \frac{F_{k-1}}{F_k}\left(1 - \frac{F_{k-1}}{F_k}\right)$.

Si on note r_k le rapport : $r_k = \frac{F_{k-1}}{F_k}$, $P\left(X_A > X_B\right) = 1 - r_k + r_k\left(1 - r_k\right) = 1 - r_k^{\,2}$.

Compte tenu de l'encadrement du rapport de deux termes consécutifs (note de la question **1**), nous obtenons l'encadrement : $\frac{3}{4} > P\left(X_A > X_B\right) > \frac{1}{2}$.

« $X_B > X_C$ » est l'évènement $\left(X_B > 2F_k\right)$ et sa probabilité est :. $P\left(X_B > X_C\right) = \frac{F_{k-1}}{F_k} = r_k$. Nous avons de ce fait l'encadrement : $\frac{\sqrt{2}}{2} > P\left(X_B > X_C\right) > \frac{1}{2}$.

« $X_C > X_A$ » est l'évènement $\left(X_A \le F_{k-2} + F_{k-1}\right)$ et sa probabilité est : $P(X_A > X_B) = \dfrac{F_{k-1}}{F_k}$, égale à la précédente et vérifiant le même encadrement.

Les probabilités de chacun des évènements $X_A > X_B$ », « $X_B > X_C$ », « $X_C > X_A$ » sont toutes les trois strictement supérieures à $\dfrac{1}{2}$.

2.b. Claire a intérêt à laisser Paul choisir en premier, la situation est analogue à celle de **I.2.** Si Paul choisit *A* (respectivement *B, C*) , elle choisira *B* (respectivement *C, A*).

Partie III : Urnes non transitives

Il sera question dans cette partie d'une « propriété H_n » qui va être démontrée par récurrence.

1.a. L'univers de probabilité relatif au tirage de deux jetons, l'un dans l'urne *A* et l'autre dans l'urne *B* est un univers contenant n^2 éléments et la probabilité de l'évènement « $X_A > X_B$ » est proportionnel au nombre $N_{A,B}$ de couples où le numéro du jeton *A* est supérieur au numéro du jeton *B* : $P\left(X_A > X_B\right) = \dfrac{N_{A,B}}{n^2}$.

Lorsque le tirage s'effectue dans les urnes *D* et *E*, l'univers de probabilité relatif au tirage de deux jetons, l'un dans l'urne *D* l'autre dans l'urne *E* est un univers contenant $(n+2)^2$ éléments. La probabilité de tirer de *D* un jeton provenant de l'urne *A* et de l'urne *E* un jeton provenant de l'urne *B* de numéro plus petit est le quotient $\dfrac{N_{A,B}}{(n+2)^2} = \dfrac{n^2}{(n+2)^2} P(X_A > X_B)$.

L'évènement « $X_D > X_E$ » est réunion de trois évènements plus simples à exprimer :

$$X_D > X_E = (X_D = X_A > X_E = X_B) \cup (X_D = 3n+6) \cup \left[(X_D = 3n+1) \cap \overline{(X_E \ge 3n+4)}\right].$$

En conséquence : $P(X_D > X_E) = \dfrac{n^2}{(n+2)^2} P(X_A > X_B) + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+2} \times \dfrac{n}{n+2} = \dfrac{n^2 P(X_A > X_B) + 2n + 2}{(n+2)^2}$.

1.b. De façon analogue, l'évènement « $X_E > X_F$ » est réunion de deux évènements plus simples : $X_E > X_F = (X_E = X_B > X_F = X_C) \cup (X_E \geq 3n+4)$.

En conséquence : $P(X_E > X_F) = \dfrac{n^2}{(n+2)^2} P(X_B > X_C) + \dfrac{2}{n+2} = \dfrac{n^2 P(X_B > X_C) + 2n + 4}{(n+2)^2}$.

De même, l'évènement « $X_F > X_D$ » est réunion de deux évènements : $X_F > X_D = (X_F = X_C > X_D = X_A) \cup \left[(X_F \geq 3n+2) \cap \overline{(X_D = 3n+6)}\right]$.

En conséquence : $P(X_F > X_D) = \dfrac{n^2}{(n+2)^2} P(X_C > X_A) + \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n^2 P(X_C > X_A) + 2n + 2}{(n+2)^2}$.

$$P(X_A > X_B) > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n^2 P(X_A > X_B) + 2n + 2}{(n+2)^2} > \frac{\frac{n^2}{2} + 2n + 2}{(n+2)^2} = \frac{1}{2} .$$

Ainsi : $P(X_A > X_B) > \dfrac{1}{2} \Rightarrow P(X_D > X_E) > \dfrac{1}{2}$.

De même $P(X_C > X_A) > \dfrac{1}{2} \Rightarrow P(X_F > X_D) > \dfrac{1}{2}$, les formules obtenues étant identiques.

Enfin, $P(X_E > X_F) = \dfrac{n^2 P(X_B > X_C) + 2n + 4}{(n+2)^2} = \left(\dfrac{n^2 P(X_B > X_C) + 2n + 2}{(n+2)^2}\right) + \dfrac{2}{(n+2)^2}$.

Une implication de même sens que les précédentes est obtenue *a fortiori* : $P(X_B > X_C) > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{n^2 P(X_B > X_C) + 2n + 2}{(n+2)^2} > \dfrac{1}{2} \Rightarrow P(X_E > X_F) > \dfrac{1}{2}$.

Les trois probabilités en question sont toutes $> \dfrac{1}{2}$.

2.a. *La propriété H_3*

Il s'agit de répartir 9 jetons numérotés de 1 à 9 dans les trois urnes.

Remarquons que $9 = F_3$ et utilisons la méthode développée dans **II.1** :

- Les jetons numéros 2, 3 et 9 sont placés dans A.
- Les jetons numéros 1, 7 et 8 sont placés dans B.
- Les jetons numéros 4, 5 et 6 sont placés dans C.

Dans ces conditions : $P(X_A > X_B) = \dfrac{F_1}{F_3} + \dfrac{F_2}{F_3} \times \dfrac{F_1}{F_3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{9}$.

Les deux autres probabilités en question sont : $P(X_B > X_C) = P(X_C > X_A) = \dfrac{F_2}{F_3} = \dfrac{2}{3}$.

Les trois probabilités sont toutes strictement supérieures à $\dfrac{1}{2}$.

La propriété H_4

Il s'agit de répartir 12 jetons numérotés de 1 à 12 dans les trois urnes. De nombreuses répartitions font l'affaire pour vérifier que H_4 est vraie.

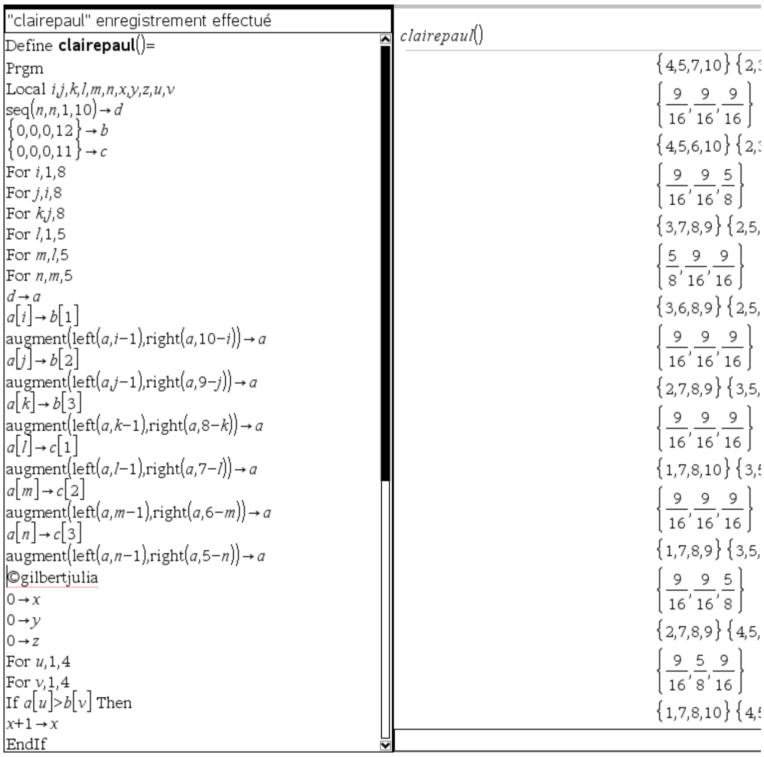
La répartition $\{10,8,7,1\}$; $\{12,6,5,3\}$; $\{11,9,4,2\}$ par exemple convient.

Il est possible d'obtenir une répartition convenable autrement qu'empiriquement.

Sans prétendre obtenir toutes les solutions, le programme **clairepaul** recherche des répartitions non transitives.

Il attribue d'office les jetons 12 et 11 aux urnes B et C (ces deux jetons ne peuvent pas se trouver dans une même urne) puis effectue des essais systématiques.

Lorsqu'une répartition convenable est trouvée, elle est affichée ainsi que les trois probabilités associées.

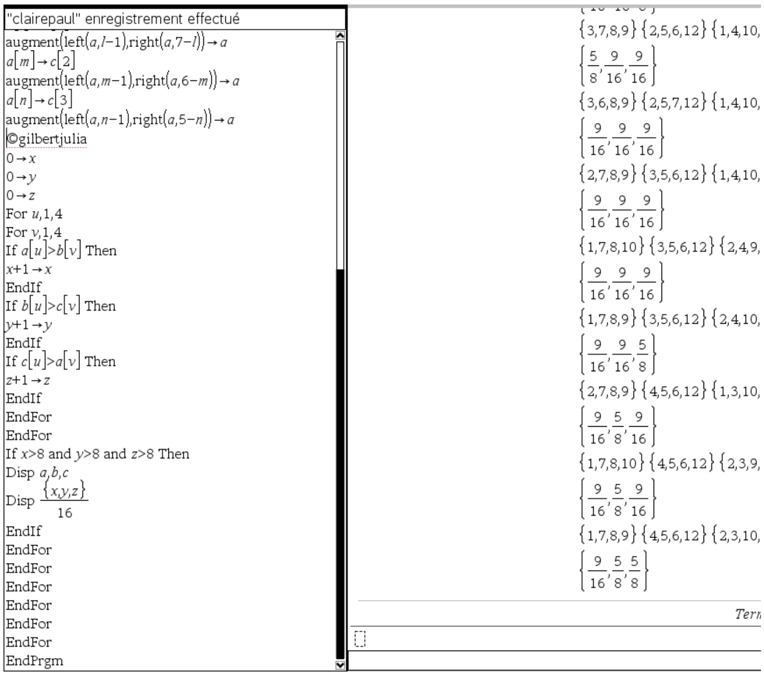

"clairepaul" enregistrement effectué

```
Define clairepaul()=
Prgm
Local i,j,k,l,m,n,x,y,z,u,v
seq(n,n,1,10)→d
{0,0,0,12}→b
{0,0,0,11}→c
For i,1,8
For j,i,8
For k,j,8
For l,1,5
For m,l,5
For n,m,5
d→a
a[i]→b[1]
augment(left(a,i−1),right(a,10−i))→a
a[j]→b[2]
augment(left(a,j−1),right(a,9−j))→a
a[k]→b[3]
augment(left(a,k−1),right(a,8−k))→a
a[l]→c[1]
augment(left(a,l−1),right(a,7−l))→a
a[m]→c[2]
augment(left(a,m−1),right(a,6−m))→a
a[n]→c[3]
augment(left(a,n−1),right(a,5−n))→a
©gilbertjulia
0→x
0→y
0→z
For u,1,4
For v,1,4
If a[u]>b[v] Then
x+1→x
EndIf
```

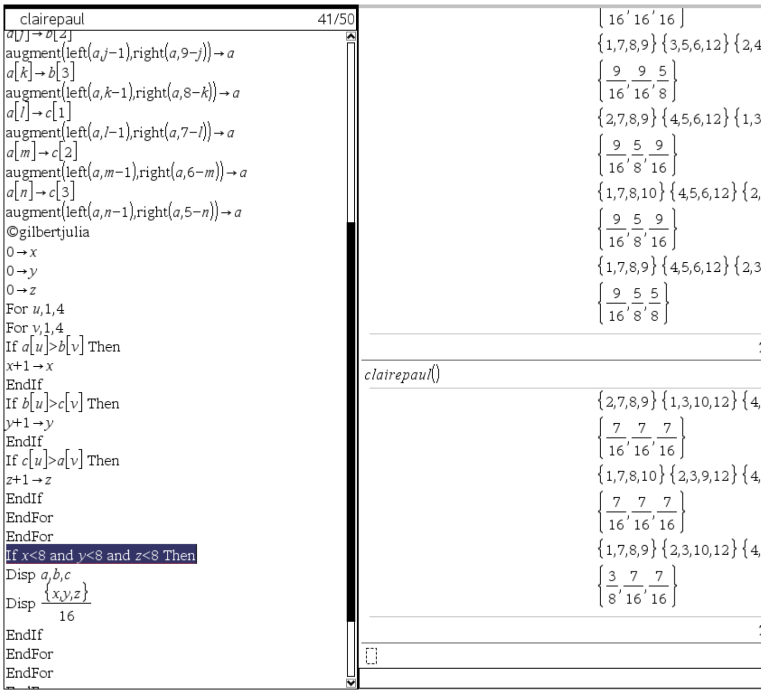
```
clairepaul()
{4,5,7,10} {2,
{9/16,9/16,9/16}
{4,5,6,10} {2,
{9/16,9/16,5/8}
{3,7,8,9} {2,5,
{5/8,9/16,9/16}
{3,6,8,9} {2,5,
{9/16,9/16,9/16}
{2,7,8,9} {3,5,
{9/16,9/16,9/16}
{1,7,8,10} {3,
{9/16,9/16,9/16}
{1,7,8,9} {3,5,
{9/16,9/16,5/8}
{2,7,8,9} {4,5,
{9/16,5/8,9/16}
{1,7,8,10} {4,
```

Nous constatons des cas où les trois probabilités dont il est question sont toutes égales à $\frac{9}{16}$

Dans d'autres cas, certaines des trois probabilités peuvent être égales à $\frac{5}{8}$



En changeant le critère de sélection, il est possible de repérer des répartitions non transitives de sens contraire, c'est-à-dire telles que $P(X_A > X_B) < \frac{1}{2}$, $P(X_B > X_C) < \frac{1}{2}$ et $P(X_C > X_A) < \frac{1}{2}$



2.b. La question **III.1** montre que la propriété H_n est héréditaire de deux en deux rangs, c'est-à-dire que si H_n est vraie, alors H_{n+2} est vraie.

- Le fait que H_3 soit vraie initialise le processus de récurrence pour les rangs impairs, et le fait que H_4 soit vraie initialise le processus de récurrence pour les rangs pairs.
- L'affirmation H_n est vraie pour tous les rangs impairs à partir du rang 3 et pour tous les rangs pairs à partir du rang 4.

Finalement, H_n est vraie pour tous les rangs, quelle que soit leur parité, à partir du rang 3.

Quel que soit l'entier n au moins égal à 3, il existe toujours une répartition de $3n$ jetons numérotés de 1 à $3n$ dans trois urnes A, B, C (n jetons dans chaque) telle qu'un jeton tiré de A est plus souvent plus grand qu'un jeton tiré de B, un jeton tiré de B est plus souvent plus grand qu'un jeton tiré de C, et un jeton tiré de C est plus souvent plus grand qu'un jeton tiré de A.

En résumé, quel que soit l'entier n au moins égal à 3, il existe des répartitions non transitives de $3n$ *jetons numérotés de* 1 *à* $3n$ *en trois lots équipotents.*

